शोध पत्र / Research Paper

आव्यूह प्रतिलोम विधि द्वारा विभिन्न प्रोग्रामन समस्याओं का हल
Solution of Various Programming Problems by Matrix Inverse Method

अशोक सिंह चौहान[*], आदर्श मंगल[**] एवं ज्ञान शेखर[***]

Ashok Singh Chouhan[*], Adarsh Mangal[**] and Gyan Shekhar[***]

[*] Research Scholar, Department of Mathematics,
Bhagwant University, Ajmer

[**] Department of Mathematics, Engineering College, Ajmer

[***] Research Supervisor, Department of Mathematics, Bhagwant University, Ajmer

Presently Department of Mathematics, Ram Sakal Singh Science College, Sitamarhi (Bihar)

ashoksinghchouhan2012@gmail.com, dradarshmangal1@gmail.com, maths430@gmail.com

https://doi.org/10.5281/zenodo.16966974

सारांश

यह शोध पत्र रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या तथा रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को आव्यूह प्रतिलोम विधि (Matrix inversion method) द्वारा हल करने का प्रस्ताव करता है। भावना श्रीवास्तव एवं अन्य द्वारा इस विधि का उपयोग बहु–उद्देशीय रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं (Multi-objective linear programming problems) का हल ज्ञात करने के लिए किया गया है। इस विधि में सिम्पलेक्स सारणी को बनाने की आवश्यकता नहीं है। इस विधि द्वारा इष्टतम हल ज्ञात करने में गणनीय समय कम लगता है। हमारे दावे की पुष्टि के लिए अंत में विभिन्न दृष्टान्तीय उदाहरण भी दिए गए है।

Abstract

This research paper proposes a Matrix Inverse method to solve the Linearly Factorized Quadratic Programming Problem (LFQFPP) and Linear Fractional Programming Problem (LFPP). The same had been introduced to solve the Multi-Objective Linear Programming Problem (MOLPP) by Bhavana Shrivastava et al. There is no necessity to form Simplex tables so far in this method. To achieve an optimal solution through this method, as far as computation time is concerned; it takes the least time. Various illustrations are given at the end to validate our claim.

मुख्य शब्दः रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या, आव्यूह प्रतिलोम विधि, बहु–उद्देशीय रैखिक प्रोग्रामन समस्या, रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या, इष्टतम हल

Keywords: Linearly Factorized Quadratic Programming Problem, Matrix Inverse Method, Multi-Objective Linear Programming Problem, Linear Fractional Programming Problem, Optimal Solution.

प्रस्तावना

द्विघात प्रोग्रामन समस्याएं अरैखिक प्रोग्रामन समस्याओं की एक मौलिक श्रेणी का प्रतिनिधित्व करती हैं, जो सिग्नल एवं इमेज प्रोसेसिंग, न्यूनतम वर्ग सन्निकटन (Least square approximation), वित्तीय पोर्टफॉलिओ के इष्टतमन आदि क्षेत्रों में व्यापक रूप से लागू होती है। पिछले कुछ वर्षों में द्विघात प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने की कुछ विधियाँ प्रस्तावित की गई है। यह शोध पत्र रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए एक नए गणनीय उपगमन (Computational approach), आव्यूह प्रतिलोम विधि को प्रस्तावित करता है। आव्यूह प्रतिलोम विधि सर्वप्रथम बहु–उद्देशीय रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का इष्टतम हल ज्ञात करने

के लिए भावना श्रीवास्तव एवं अन्य [5] ने प्रस्तावित की थी। रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्याएं, अरैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का एक विशेष उपसमूह बनाती है, जो एक ऐसे उद्देश्य फलन को इष्टतम करने पर ध्यान केंद्रित करते हैं जिसमें रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात संरचना होती है तथा जो रैखिक समीकरणों (अथवा/और) असमिकाओं के साथ परिभाषित होती है। प्रस्तावित विधि पारंपरिक सिम्प्लेक्स विधि की तुलना में गणनीय रूप से अधिक कुशल एवं अवधारणात्मक रूप से सरल विकल्प प्रदान करती है। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के लिए साहित्य में बहुत सारी विधियां प्रस्तावित की गई है। फ्रेंक एवं अन्य [1] ने द्विघात प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए एल्गोरिथ्म प्रस्तावित की। पंडियन एवं अन्य [2] ने रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली द्विघात प्रोग्रामन समस्याओं के लिए एक नवीन विधि विकसित की। जैन एवं अन्य [3–4] ने क्रमशः गॉस विलोपन प्रविधि तथा संशोधित फूरिएर विलोपन प्रविधि का उपयोग करते हुए द्विघात प्रोग्रामन समस्या को हल किया।

कार्नेस एवं अन्य [6] ने रैखिक भिन्नात्मक फलनकों के साथ प्रोग्रामन पर कार्य किया। उन्होंने किसी रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं से प्रतिस्थापित किया जो केवल फलनक एवं एक व्यवरोध के चिन्ह में एक दूसरे से भिन्न होते हैं। कांतिस्वरूप [7] ने रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए एक विधि प्रस्तावित की, जिसमें उद्देश्य फलन के हर गुणांकों को खोजने के लिए एक नई पंक्ति बनाई जाती है और इस पंक्ति का उपयोग प्रवेशी चर का चयन करने के लिए किया जाता है। इस विधि में अपगामी चर तथा कीलक अवयव का चयन सिम्प्लेक्स विधि के समान ही है। इस विधि में यह भी माना जाता है कि सभी संभव हलों के लिए हर सदैव धनात्मक है। कालान्तर में जैन एवं अन्य [9, 10, 11] ने गॉस विलोपन प्राविधि तथा संशोधित फूरिएर विलोपन प्राविधि की सहायता से भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का हल प्राप्त किया जोकि अन्य पारंपरिक विधियों से प्राप्त होने वाले हल के सामान ही प्राप्त हुआ। जैन एवं अन्य [8] ने समघात व्यवरोध रखने वाली भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को हल करने के लिए एल्गोरिथ्म विकसित की।

रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या

रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या, द्विघात प्रोग्रामन समस्या का एक विशेष रूप है जो पारंपरिक द्विघात प्रोग्रामन निदर्श से भिन्न है क्योंकि यह उद्देश्य फलन को विशुद्ध रूप से द्विघात फलन के बजाय दो रैखिक फलनों के गुणन के रूप में अभिव्यक्त करता है। यह संशोधन, विचारार्थ समस्या की गणितीय संरचना को सरल बनाता है, गणनीय दक्षता को बढाता है और अधिक प्रभावी इष्टतमन करता है। इस प्रकार उद्देश्य फलन को पुनर्गठित कर, विभिन्न अनुप्रयोगों में जटिल इष्टतम समस्याओं को हल करने के लिए रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या एक सुव्यवस्थित दृष्टिकोण प्रदान करती है।

विचारार्थ मानक समस्या

यहाँ हम एक ऐसी द्विघात प्रोग्रामन समस्या पर विचार करते हैं जिसमें उद्देश्य फलन दो रैखिक फलनों के गुणनफल के रूप में निम्न रूप में दिया हो।

अधिकतम कीजिये

$$Z = (a_1 x + a_1)(a_2 x + a_2) = Z_1 Z_2 \quad \text{(माना)}$$

व्यवरोध $\quad Ax \le b$

एवं $\quad x \ge 0$

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या

भिन्नात्मक प्रोग्रामन तेजी से वर्धमान एक आधुनिक एवं व्यावहारिक विषय है। इसका उपयोग संचार प्रणाली, सैन्य विज्ञान, प्रबंधन, उद्योग और उत्पादन आदि में उत्पन्न होने वाली विभिन्न समस्याओं के समाधान में किया जाता है। यथा अर्थशास्त्र में, भिन्नात्मक प्रोग्रामन उस समस्या को हल करने में उपयोगी होती है, जिसमें विभिन्न आर्थिक गतिविधियाँ अपने मूल्यों के स्तर के अनुपात में निश्चित संसाधनों का उपयोग करती है। इसे अतिपरवलयिक इष्टतमन समस्या भी कहा जाता है।

विचारार्थ मानक समस्या

रैखिक भिन्नात्मक समस्या का गणितीय रूप निम्न है–

अधिकतम कीजिये

$$Z = \frac{c'x + \alpha}{C'x + \beta}$$

व्यवरोध $Ax(\leq,=,\geq)b$

एवं $x \geq 0$

भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या के व्यवरोधों में विद्यमान $(\leq,=,\geq)$ में से एक समय में केवल एक ही चिन्ह हो सकता है। x, c व C; $n\times1$ स्तम्भ सदिश है। A, $m\times n$ क्रम का सक्रियता आव्यूह है। b, $m\times1$ क्रम का स्तम्भ सदिश है।

आव्यूह प्रतिलोम विधि

चरण 1 – सर्वप्रथम दी गई रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य फलन रखने वाली द्विघात प्रोग्रामन समस्या को दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं के रूप में व्यक्त करते है।

चरण 2 – उपरोक्त चरण 1 में प्राप्त सभी रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं में व्यवरोधों के रूप में उपस्थित असमिकाओं को समीकरण मानते हुए समीकरण निकाय को $Ax=b$ के रूप में व्यक्त करते हैं।

चरण 3 – अब निर्णायक चरों के गुणांकों से एक आव्यूह A बनाते है।

चरण 4 – इस आव्यूह के सारणिक के मान की जांच करते है। यदि यह अशून्य प्राप्त होता है तो समस्या का हल संभव है अन्यथा नहीं।

चरण 5 – आव्यूह A से प्रतिलोम आव्यूह A^{-1} ज्ञात करते है।

चरण 6 – निर्णायक चरों के मूल्यों को समीकरण $X=A^{-1}B$ की सहायता से ज्ञात करते है।

चरण 7 – इन निर्णायक चरों के मानों को दोनों उद्देश्य फलनों में प्रतिस्थापित करते है तथा Z_1 व Z_2 का मान ज्ञात करते हैं।

चरण 8 – Z_1 व Z_2 के मानों को गुणा कर विचारार्थ समस्या के उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करते हैं।

दृष्टान्तीय उदाहरण

रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या

अधिकतम कीजिये

$$Z = (3x_1 + 2x_2)(x_1 + 3x_2)$$

व्यवरोध $x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 2$

तथा $x_1, x_2 \ge 0$

उपरोक्त रैखिकतः गुणनखंडित उद्देश्य द्विवघात प्रोग्रामन समस्या से निम्न दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ प्राप्त होती है–

(I) अधिकतम कीजिये

$$Z = (3x_1 + 2x_2) = Z_1 \quad \text{(माना)}$$

व्यवरोध $x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 2$

तथा $x_1, x_2 \ge 0$

(II) अधिकतम कीजिये

$$Z = (x_1 + 3x_2) = Z_2 \quad \text{(माना)}$$

व्यवरोध $x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 - x_2 \le 2$

तथा $x_1, x_2 \ge 0$

समस्या (I) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है–

अधिकतम कीजिये

$$Z_1 = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

व्यवरोध $x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 = 4$

$x_1 - x_2 + 0S_1 + S_2 = 2$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

समस्या (II) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है–

अधिकतम कीजिये

$$Z_2 = x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

व्यवरोध $x_1 + x_2 + S_1 + 0S_2 = 4$

$x_1 - x_2 + 0S_1 + S_2 = 2$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$

समस्या (I) व समस्या (II) से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ तथा $b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

चूंकि $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$ अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A का प्रतिलोम $A^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 1$$

अतः $Z_1 = 3x_1 + 2x_2 = 3(3) + 2(1) = 11$ व $Z_2 = x_1 + 3x_2 = (3) + 3(1) = 6$

उपरोक्त समस्या का इष्टतम हल $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ एवं $Z = Z_1 Z_2 = (11)(6) = 66$

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या

निम्नतम कीजिये

$$Z = \frac{-6x_1 - 5x_2}{2x_1 + 7}$$

व्यवरोध $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

उपरोक्त रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या से निम्न दो रैखिक प्रोग्रामन समस्याएँ प्राप्त होती है–

(I) निम्नतम कीजिये

$$Z = -6x_1 - 5x_2$$

व्यवरोध $x_1 + 2x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 6$

तथा $x_1, x_2 \geq 0$

यहाँ उद्देश्य फलन निम्नतमीकरण का दिया हुआ है अतः सर्वप्रथम इसे अधिकतमीकरण में परिवर्तित करते है। यथा अधिकतम कीजिए

$$Z = 6x_1 + 5x_2 = Z_1 \quad \text{(माना)}$$

(II) अधिकतम कीजिये

$$Z = 2x_1 + 7 = Z_2 \quad \text{(माना)}$$

व्यवरोध $x_1 + 2x_2 \le 3$

$3x_1 + 2x_2 \le 6$

तथा $x_1, x_2 \ge 0$

समस्या (I) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है–

अधिकतम कीजिये

$$Z_1 = 6x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

व्यवरोध $x_1 + 2x_2 + S_1 + 0S_2 = 3$

$3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 = 6$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

समस्या (II) में आवश्यकतानुसार न्यूनतापूरक चरों का समावेश करने पर समस्या निम्न रूप लेती है–

अधिकतम कीजिये

$$Z_2 = 2x_1 + 7 + 0S_1 + 0S_2$$

व्यवरोध $x_1 + 2x_2 + S_1 + 0S_2 = 3$

$3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + S_2 = 6$

तथा $x_1, x_2, S_1, S_2 \ge 0$

समस्या (I) व समस्या (II) से आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ तथा $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

चूंकि $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4 \neq 0$ अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

आव्यूह A का प्रतिलोम $A^{-1} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$$

अतः $Z_1 = 6x_1 + 5x_2 = 6\left(\frac{3}{2}\right) + 5\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{51}{4}$ व $Z_2 = 2x_1 + 7 = 2\left(\frac{3}{2}\right) + 7 = 10$

उपरोक्त समस्या का इष्टतम हल $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$ एवं निम्नतम $Z = \frac{z_1}{z_2} = -\frac{51}{40}$

निष्कर्ष

भावना श्रीवास्तव एवं अन्य द्वारा प्रस्तावित आव्यूह प्रतिलोम विधि, पारंपरिक सिम्प्लेक्स विधि से बेहतर है क्योंकि इसमें कम पुनरावृत्तियों में ही इष्टतम हल को प्राप्त किया जा सकता है। इस विधि से अन्य विधियों की तुलना में कम समय में ही इष्टतम हल को प्राप्त किया जा सकता है। इस एल्गोरिथ्म से प्राप्त परिणाम को गॉस विलोपन विधि, संशोधित फूरिएर विलोपन विधि, पारंपरिक सिम्पलेक्स विधि तथा अन्य विधियों से प्राप्त परिणामों से आसानी से सत्यापित किया जा सकता है।

हितों का टकराव

लेखक इस शोध पत्र के प्रकाशन के सम्बन्ध में किसी भी प्रकार के हितों के टकराव की घोषणा नहीं करते हैं।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिन्दी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णानुक्रमित हिन्दी शब्दावली
Computational approach	गणनीय उपगमन
Least square approximation	न्यूनतम वर्ग सन्निकटन
Linearly factorized quadratic programming problem	रैखिकतः गुणनखंडित द्विघात प्रोग्रामन समस्या
Matrix inversion method	आव्यूह प्रतिलोम विधि
Multi-objective linear programming problem	बहु–उद्देशीय रैखिक प्रोग्रामन समस्या
Optimal solution	इष्टतम हल

सन्दर्भ

1. Frank, M., and Wolfe, P. (1956). An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 3, pp: 95-110.
2. Pandian, and P., Jayalakshmi, M. (2015). Solving quadratic programming problems having linearly factorized objective function. International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 101, No. 5, pp: 699-706.
3. Jain, S., Mangal, A., and Sangeeta (2019). Modelling of Gauss elimination technique for quadratic optimization. Advances in Modelling and Analysis A, Vol. 56, No. 2-4, pp: 31-34.

4. Jain, S., Mangal, A. and Sangeeta (2020). Modelling of nature inspired modified Fourier elimination technique for quadratic optimization. International Journal of Swarm Intelligence, Vol. 5, No. 2, pp: 182-190.

5. Shrivastava, B., Agrawal, B., and Kumar, S. (2023). Computation of multi-objective linear programming problem by matrix inversion method. European Chemical Bulletin, 12 (special issue 4), pp: 19125-19129.

6. Charnes, A., and Cooper, W.W. (1962). Programming with linear fractional functionals. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 9, pp: 181-186.

7. Swarup, K. (1965). Linear fractional functionals programming. Operations Research, Vol. 13, No. 6, pp: 1029-1036.

8. Jain, S., and Mangal, A. (2003). Algorithm for fractional programming problem with homogeneous constraints. Ganita Sandesh, Vol. 17(2), pp: 55-60.

9. Jain, S., and Mangal, A. (2008). Gauss elimination technique for fractional programming problem. Journal of Indian Society of Statistics and Operations Research. Vol. XXIX, pp: 1-4.

10. Jain, S., and Mangal, A. (2004). Modified Fourier elimination technique for fractional programming problem. Acharya Nagarjuna International Journal of Mathematics & Information Technology. Vol. 1(2), pp: 121-131.

11. Jain, S., and Mangal, A. (2008). Extended Gauss elimination technique for integer solution of linear fractional programming. Journal of Indian Mathematical Society. Vol. 75, pp: 37-46.