शोध पत्र / Research Paper

पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय का स्मार्ट फोन के क्रय में अनुप्रयोग

Application of Pythagorean Fuzzy Sets in Purchasing a Smart Phone

मनीष कुमार गुंजन[1] एवं अमल कुमार अदक[2]

Manish Kumar Gunjan[1] and Amal Kumar Adak[2]

[1] Research Scholar (Mathematics),

Lalit Narayan Mithila University, Darbhanga - 846008, Bihar, India

[2] Department of Mathematics,

Ganesh Dutt College, Begusarai - 851101, Bihar, India

[1]mgunjanmaths@gmail.com, [2]amaladak17@gmail.com

https://doi.org/10.5281/zenodo.16966839

सारांश

कई स्मार्टफोनों में से एक उपर्युक्त स्मार्टफोन का चयन करने के लिए मूल्य (Price), कैमरा (Camera), RAM और बैटरी जैसे विभिन्न मानदंडों का मूल्यांकन आवश्यक होता है। ग्राहकों को खरीदारी संबंधी निर्णय लेने में सहायता प्रदान करने के लिए, इस शोध पत्र में बहु–मानदंड निर्णयण (MCDM) की एक प्रसिद्ध तकनीक, टॉप्सिस (TOPSIS) का उपयोग किया गया है। प्रस्तावित विधि में पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं (Pythagorean fuzzy numbers) के बीच दूरी की गणना करने के लिए गोलाकार दूरी मापन पद्धति (Spherical distance measurement method) का उपयोग किया गया है। अंततः, सापेक्ष निकटता गुणांक (Relative closeness coefficients) तथा संशोधित निकटता गुणांक (Revised closeness coefficients) की गणना की गई है, जिसकी मदद से स्मार्टफोनों की एक रैंकिंग स्थापित की गई है और सबसे उपयुक्त विकल्प की पहचान की गई है।

Abstract

Selecting an optimal smartphone among a list of smartphones requires evaluating multiple criteria like Price, Camera, RAM, and battery. To help customers make decisions, this study employs a well-known multi-criteria decision-making technique (MCDM) namely, Test of Order of Preference by Similarity to ideal solution (TOPSIS). The proposed method uses a spherical distance measurement method to calculate the distances between Pythagorean fuzzy numbers. Finally, the relative closeness coefficients and the revised closeness coefficients are calculated to establish a ranking order of smartphones, identifying the most suitable option.

मुख्य शब्दः पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय; टॉप्सिस; स्कोर फलन; गोलाकार दूरी मापन; सापेक्ष निकटता गुणांक, संशोधित निकटता गुणांक।

Keywords: Pythagorean fuzzy sets, TOPSIS; Score function, Spherical distance measurement, Relative closeness coefficient, Revised closeness coefficient.

प्रस्तावना

बहु–मानदंड निर्णयण एक ऐसी तकनीक है, जिसमें कई मानदंडों के आधार पर निर्णय लिया जाता है। ज़ादेह [1] ने अस्फुट समुच्चय सिद्धांत (Fuzzy Set Theory) के माध्यम से अनिश्चितता (Uncertainty) तथा अपरिशुद्धता (Imprecision) को मॉडल करने के लिए सदस्यता फलन (Membership Function) की

अवधारणा प्रस्तुत की। लेकिन यह मॉडल हमेशा पर्याप्त नहीं होता है, क्योंकि यहाँ संशय (hesitation) भी मौजूद हो सकता है।

अतनासोव [2] ने अस्फुट समुच्चय में संशय को शामिल करते हुए अन्तर्ज्ञानवादी अस्फुट समुच्चय (Intuitionistic fuzzy set) प्रस्तुत किया, जो अस्फुट समुच्चय का एक सामान्यीकरण (Generalization) है। इसमें सदस्यता (membership) और असदस्यता (non–membership) डिग्री का योग 1 से कम या बराबर होना चाहिए। हालाँकि, कुछ मामलों में इनका योग 1 से अधिक हो सकता है। इस समस्या के समाधान हेतु रोनाल्ड आर. येगेर. [3] ने पाइथागोरियन अस्फुट समुच्चय (Pythagorean fuzzy set) की अवधारणा प्रस्तुत की, जिसमें सदस्यता कोटि α और असदस्यता कोटि β के वर्गों (squares) का योग 1 से कम या बराबर होना चाहिए। वहीं संशय की कोटि (Degree of Hesitation), $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ से प्राप्त की जाती है।

पूर्व में कई शोधकर्ताओं जैसे चेन [4], वे और वे [5], एजेजवा [6], एवं अदक, नील कमल और अन्य [7] ने पाइथागोरियन अस्फुट समुच्चय के लिए विभिन्न दूरी माप, समानता माप और रैंकिंग की विधियाँ प्रस्तुत की, जिन्हे इंटरनेट स्टॉक समस्या (Internet Stock problem), पैटर्न पहचान (Pattern recognition) इत्यादि में उपयोगी पाया गया। लेकिन इनमे से कई विधियाँ जटिल गणितीय संरचना के कारण कम प्रभावी हैं और अत्यधिक अनिश्चित पाइथागोरियन अस्फुट समुच्चय को संभालने में असमर्थ हैं।

प्रस्तुत शोध पत्र में इस समस्या के समाधान हेतु एक नवीन दूरी मापन विधि (new method of measuring distance) प्रस्तावित की गई है, जो दूरी माप के अभिगृहीत (axiom of distance measurement) की शर्त को पूर्ण करती है। चूंकि $0 \le \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \le 1$ होता है, अतः त्रिक (Triplet) (α,β,γ) को एक इकाई त्रिज्या (unt radius) तथा मूल बिंदु (origin) पर केंद्रित गोलाकार सतह (spherical surface) पर स्थित माना जा सकता है।

इस आधार पर, हम किसी दो पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय के बीच की दूरी को इकाई त्रिज्या वाले गोलाकार सतह (spherical surface with unit radius) पर गोलाकार दूरी (spherical distance) के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

इस शोध पत्र के खंड निम्नलिखित ढंग से संरचित हैं: खंड 1 में प्रस्तावना (Introduction) प्रस्तुत की गई है, जिसमें शोध की पृष्ठभूमि, उद्देश्य तथा इसका महत्व स्पष्ट किया गया है। खंड 2 में मूलभूत अवधारणाओं (fundamental concepts) का संक्षिप्त विवरण (concise overview) प्रस्तुत किया गया है, जो पाठक को आवश्यक पृष्ठभूमि (background) और जानकारी प्रदान करता है। खंड 3 में पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओ के लिए एक नवीन गोलाकार दूरी मापन विधि प्रस्तुत की गई है। खंड 4 में टॉप्सिस [8] का उपयोग करके बहु–मानदंड निर्णयण समस्याओ (multi–criteria decision–making problems) को हल करने की विधि पर चर्चा की गई है। यह तकनीक मानदंडों (criteria) के आधार पर विभिन्न विकल्पों (alternatives) की रैंकिंग (ranking) निर्धारित करने में सहायक है। खंड 5 में प्रस्तावित विधि (proposed methodology) के माध्यम से स्मार्ट फोन चयन की एक व्यावहारिक समस्या को हल किया गया है, जिससे कि इसकी सुसंगतता (feasibility) और व्यावहारिकता (practicality) सिद्ध होती है। खंड 6 में शोध पत्र के निष्कर्ष (concluding remarks) प्रस्तुत किए गए हैं, जिसमे अध्ययन का सारांश (summary) दिया गया है और भविष्य के अनुसंधान (future research) के संभावित दिशाओं (potential directions) पर भी चर्चा की गई है।

प्रारम्भिक जानकारी एवं परिभाषाएं

इस खंड में हम पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चयों की कुछ बुनियादी अवधारणाओं के साथ साथ उसके कुछ प्रारम्भिक पहलुओं को प्रस्तुत करेंगे जो की इस शोध पत्र के लिए आवश्यक है।

परिभाषा [1] माना कि X एक सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set) है। तब एक पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय को निम्नलिखित समुच्चय से परिभाषित किया जाता है:

$$P = \{\langle x, \alpha_P(x), \beta_P \rangle \mid x \in X\}$$

जहां, $\alpha_P(x): X \to [0,1]$ तथा $\beta_P(x): X \to [0,1]$, सदस्य x के समुच्चय P में क्रमशः सदस्यता की कोटि एवं असदस्यता की कोटि को दर्शाता है। इन दोनों कोटि के लिए निम्नलिखित शर्त है:

$$0 \le (\alpha_P(x))^2 + (\beta_P(x))^2 \le 1$$

यहाँ संशय की कोटि या अनिर्धार्यता की कोटि (deeree of indeterminacy), $\gamma_P(x) = \sqrt{1-(\alpha_P(x))^2-(\beta_P(x))^2}$, किसी सदस्य x के समुच्चय P में सदस्यता या गैर–सदस्यता के बारे में अनिश्चितता बतलाती है। यहाँ युग्म $<\alpha_P(x), \beta_P(x)>$ को एक पाइथागोरेयन अस्फुट संख्या (Pythagorean Fuzzy Number) कहा जाता है।

परिभाषा [2] माना कि $p = \langle \alpha, \beta \rangle$ एक पाइथागोरेयन अस्फुट संख्या (Pythagorean Fuzy Numbers) हैं। तब s(p) को p का स्कोर फलन (Score function) का मान कहा जाता है, जहां :

$$s(p) = (\alpha)^2 - (\beta)^2;\ s(p) \in [0,1]$$

उदाहरण 1 माना कि दो $p_1 = \langle 0.7, 0.3 \rangle$ और $p_2 = \langle 0.4, 0.6 \rangle$ कोई दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याएं हैं। तब $s(p_1) = 0.40$ और $s(p_2) = -0.20$ क्रमशः p_1 और p_2 के स्कोर फलन के मान हैं।

माना कि $p_1 = \langle \alpha_1, \beta_1 \rangle$ तथा $p_2 = \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle$ कोई दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याएं हैं। $s(p_1)$ तथा $s(p_2)$ क्रमशः p_1 तथा p_2 के स्कोर फलन के मान हैं। साथ ही $h(p_1) = \alpha_1^2 + \beta_1^2$ एवं $h(p_2) = \alpha_2^2 + \beta_2^2$ क्रमशः p_1 तथा p_2 के यथार्थता फलन के मान हैं। तब :

अगर $s(p_1) < s(p_2)$ हो तो p_1 को p_2 से छोटा $(p_1 < p_2)$ कहा जाता है।

अगर $s(p_1) > s(p_2)$ हो तो p_1 को p_2 से बड़ा $(p_1 > p_2)$ कहा जाता है।

अगर $s(p_1) = s(p_2)$ तब p_1 तथा p_2 एक ही सूचनाएँ $(p_1 = p_2)$ प्रदान करते हैं।

पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के लिए गोलाकार दूरी मापन विधि

माना कि $p = \langle \alpha, \beta \rangle$ एक पाइथागोरेयन अस्फुट संख्या है, जहां $0 \le \alpha^2 + \beta^2 \le 1$ तथा संशय की कोटि $\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$ है। अतः $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ ।

अतः हम यह कह सकते हैं कि त्रिक (triplet) (α,β,γ), इकाई त्रिज्या (unit radius) और मूल बिंदु (origin) (0,0) पर केंद्रित गोलाकार सतह (spherical surface) पर स्थित है। इस प्रकार हम दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के बीच की गोलाकार दूरी (spherical distance) को प्राप्त कर सकते हैं, जो इस प्रतिबंधित गोलाकार सतह (restricted spherical surface) पर होती है।

परिभाषा मान लीजिए कि A और C गोलाकार सतह (spherical surface) पर दो बिंदु हैं, जिनके निर्देशांक (coorinates) क्रमशः (x_1,y_1,z_1) और (x_2,y_2,z_2) हैं। तो इन दो बिंदुओं के बीच की गोलाकार दूरी (spherical distance) को निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित किया जाता है:

$$D_{SP}(A,C)=\arccos\left\{1-\frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]\right\} \quad (1)$$

इस सूत्र को शामिल करते हुए, दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के बीच की गोलाकार दूरी को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

परिभाषा मान लीजिए कि $p_1=\langle\alpha_1,\beta_1\rangle$ और $p_2=\langle\alpha_2,\beta_2\rangle$ पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याएं हैं, जिनके अल्परोधकता कोटी, क्रमशः γ_1 और γ_2 हैं। तो इन दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के बीच की गोलाकार दूरी (spherical distance) को निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है:

$$D_{SP}(p_1,p_2)=\frac{2}{\pi}\arccos\left\{1-\frac{1}{2}\left[(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2+(\gamma_1-\gamma_2)^2\right]\right\} \quad (2)$$

यहाँ दूरी माप का मान [0,1] के अंतराल में प्राप्त किया जा सके, इसके लिए $\frac{2}{\pi}$ घटक (factor) से गुणा किया गया है।

3–आयामी ज्यामिति (3–Dimensional Geometry) से हम जानते हैं कि अगर $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ और $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ कोई दो बिन्दु हो तो $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1$ और $\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$। अतः समीकरण (3) का सरलीकरण करने पर हमे गोलाकार दूरी (spherical dstance) का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होता है:

$$D_{SP}(p_1,p_2)=\frac{2}{\pi}\arccos\{\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2+\gamma_1\gamma_2\}$$

अब हम हम दो पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय के बीच गोलाकार दूरी (spherical distance) और सामान्यीकृत गोलाकार दूरी (normalized spherical distance) को परिभाषित करते हैं।

परिभाषा मान लीजिए कि दो पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय

$P=\{x_i,\langle\alpha_P(x_i),\beta_P(x_i)\rangle:x_i\in X;i=1,2,3,...,n\}$ और

$Q=\{x_i,\langle\alpha_Q(x_i),\beta_Q(x_i)\rangle:x_i\in X;i=1,2,3,...,n\}$ हैं, जो किसी सार्वत्रिक समुच्चय (Universal Set) X के अंतर्गत हैं। तो उनके बीच की गोलाकार दूरी और सामान्यीकृत गोलाकार दूरी को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

गोलाकार दूरी:

$$D_{SP}(P,Q)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\arccos\left[\alpha_P(x_i)\alpha_Q(x_i)+\beta_P(x_i)\beta_Q(x_i)+\gamma_P(x_i)\gamma_Q(x_i)\right]$$

जहां $0\le D_{SP}(P,Q)\le n$.

सामान्यीकृत गोलाकार दूरी:

$$D_{NS}(P,Q)=\frac{2}{n\pi}\sum_{i=1}^{n}\arccos\left[\alpha_P(x_i)\alpha_Q(x_i)+\beta_P(x_i)\beta_Q(x_i)+\gamma_P(x_i)\gamma_Q(x_i)\right]$$

जहां $0\le D_{NS}(P,Q)\le n$.

परिभाषा मान लीजिए कि $P_1=\left\{\left(\alpha_{1j},\beta_{1j}\right):j=1,2,3,...,n\right\}$ और $P_2=\left\{\left(\alpha_{2j},\beta_{2j}\right):j=1,2,3,...,n\right\}$ कोई दो पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के समुच्चय हैं। w_j, j वां घटक का वजन (weight) है, यानी $0\le w_j\le 1$ और $\sum_{i=1}^{n}w_j=1$, $w=(w_1,w_2,...w_n)^T$ तो P_1 और P_2 के बीच की भारित सामान्यीकृत गोलाकार दूरी (Weighted Normalized Spherical Distance) को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$$D_{NS}(P_1,P_2)=\frac{2}{n\pi}\sum_{j=1}^{n}w_j\arccos\left[\alpha_{1j}\alpha_{2j}+\beta_{1j}\beta_{2j}+\gamma_{1j}\gamma_{2j}\right] \qquad (6)$$

उदाहरण 2:

मान लीजिए कि $P_1=\left\{\langle 0.6,0.3\rangle,\langle 0.8,0.2\rangle,\langle 0.5,0.4\rangle\right\}$ और $P_2=\left\{\langle 0.7,0.2\rangle,\langle 0.7,0.3\rangle,\langle 0.9,0.1\rangle\right\}$, दो पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चय हैं, और उनके घटक के वजन का सदिश $w=(0.2,0.5,0.3)^T$ दिए गए हैं। तो P_1 और P_2 के बीच की भारित गोलाकार दूरी (Weighted Spheical Distance) $D_{NS}(P_1,P_2)=0.0499$ है।

बहु–मानदंड निर्णयन समस्याओं के लिए टॉप्सिस पद्धति

इस खंड में, हम बहु–मानदंड निर्णयन समस्या पर विचार करेंगे, जहां समस्या में निहित जानकारी को पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याओं के रूप में लिया गया है, और इस समस्या को हल करने के लिए हम गोलाकार दूरी मापन विधि का उपयोग करेंगे।

मान लीजिए कि $A=\left\{v_1,v_2,v_3,...,v_m\right\}$, $(m\ge 2)$ विकल्पों (alternatives) का एक समुच्चय है और $C=\left\{C_1,C_2,C_3,...,C_n\right\},(n\ge 2)$ मानदंडों (criteria) का एक समुच्चय है। $w=(w_1,w_2,w_3,...,w_n)^T$ भार सदिश (wight vector) है, जहां w_j,j –वें मानदंड का भार है। साथ ही, $0\le w_j\le 1$ और $\sum_{i=1}^{n}w_j=1$. मान लीजिए कि पाइथागोरेयन अस्फुट संख्याएं $\left\langle\alpha_{ij},\beta_{ij}\right\rangle$ i–वें विकल्प के लिए j–वें मानदंड के मूल्यांकन मान (assessment value) को दर्शाता है, अर्थात् $C_j(v_i)=\left\langle\alpha_{ij},\beta_{ij}\right\rangle$ जहां α_{ij}, i–वें विकल्प के लिए j–वें मानदंड

की सदस्यता कोटि (membership degree) और β_{ij}, i–वें विकल्प के लिए j–वें मानदंड की असदस्यता कोटि (non–membership degree) को दर्शाता है। $R=\left(C_j(v_i)\right)_{m\times n}$ पाइथागोरेयन अस्फुट निर्णय आव्यूह (Pythagorean fuzzy decision matrix) को दर्शाता है।

$$R=\begin{pmatrix} \langle\alpha_{11},\beta_{11}\rangle & \langle\alpha_{12},\beta_{12}\rangle & \ldots & \langle\alpha_{1n},\beta_{1n}\rangle \\ \langle\alpha_{21},\beta_{21}\rangle & \langle\alpha_{22},\beta_{22}\rangle & \ldots & \langle\alpha_{2n},\beta_{2n}\rangle \\ \vdots & \ldots & \ddots & \vdots \\ \langle\alpha_{m1},\beta_{m1}\rangle & \langle\alpha_{m2},\beta_{m2}\rangle & \ldots & \langle\alpha_{mn},\beta_{mn}\rangle \end{pmatrix}$$

प्रस्तावित विधि की प्रक्रिया

इस विधि में, सबसे पहले पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल की गणना की जाती है। फिर, प्रत्येक विकल्प की इन दोनों से सामान्यीकृत गोलाकार दूरी ज्ञात की जाती है। तत्पश्चात, टॉप्सिस के सिद्धांत का उपयोग करके विकल्पों की सापेक्ष निकटता गुणांक की गणना की जाती है। अंत में, इस गुणांक के आधार पर विकल्पों की रैंकिंग की जाती है और सबसे अच्छा विकल्प (इष्टतम हल) चुना जाता है।

मान लीजिए J_1 लाभ मानदंड (benefit criteria) का एक समुच्चय है और J_2 लागत मानदंड (cost criteria) का एक समुच्चय है। तब प्रत्येक $C_j(v_i)$ के लिए स्कोर फलन $S\left(C_j(v_i)\right)$ ज्ञात किया जाता है। इनकी सहायता से पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल, v^+ और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल, v^- की गणना निम्नलिखित सूत्रों का उपयोग करके की जाती है:

$$v^+=\left\{C_j,\max\left(S\left(C_j(v_i)\right)\right)\mid j=1,2,3,\ldots,n\right\} \tag{7}$$

$$v^-=\left\{C_j,\min\left(S\left(C_j(v_i)\right)\right)\mid j=1,2,3,\ldots,n\right\} \tag{8}$$

प्रत्येक विकल्प (alternative) से पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल तक की सामान्यीकृत गोलाकार दूरी की गणना की जाती है। विकल्प v_i से पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल तथा पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल तक की भारित सामान्यीकृत गोलाकार दूरी, $D_{NS}(v_i,v^+)$ तथा $D_{NS}(v_i,v^-)$ को निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है:

$$\begin{aligned} D_{NS}\left(v_i,v^+\right)&=\sum_{j=1}^{n}D_{NS}\left(C_j(v_i),C_j(v^+)\right)\\ &=\frac{2}{n\pi}\sum_{j=1}^{n}w_j\arccos\left(\alpha_{ij}\alpha_j^+ +\beta_{ij}\beta_j^+ +\gamma_{ij}\gamma_j^+\right) \end{aligned} \tag{9}$$

$$D_{NS}\left(v_i,v^+\right)=\sum_{j=1}^{n}D_{NS}\left(C_j(v_i),C_j(v^-)\right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sum_{j=1}^{n} w_j \arccos\left(\alpha_{ij}\alpha_j^- + \beta_{ij}\beta_j^- + \gamma_{ij}\gamma_j^-\right) \quad (10)$$

जहां $i = 1,2,3,...,n$.

टॉप्सिस के सिद्धांत के अनुसार अगर किसी विशेष विकल्प x_i के लिए प्राप्त $D_{NS}\left(v_i, v^+\right)$ का मान अन्य किसी भी विकल्प x_j के लिए प्राप्त $D_{PS}\left(v_j, v^+\right)$ में से सबसे छोटा हो, तथा $D_{NS}\left(v_i, v^-\right)$ का मान अन्य किसी भी विकल्प x_j के लिए प्राप्त $D_{NS}\left(v_j, v^-\right)$ में से सबसे छोटा हो तो v_i को अन्य सभी विकल्पों में सबसे बेहतर माना जाता है। विकल्प x_i की पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल के सापेक्ष, सापेक्ष निकटता गुणांक की गणना टॉप्सिस विधि के मूल सिद्धांत का उपयोग करके निम्नलिखित सूत्र से की जाती है।

$$RC(v_i) = \frac{D_{NS}(v_i, v^-)}{D_{NS}(v_i, v^+) + D_{NS}(v_i, v^-)} \quad (11)$$

संशोधित निकटता गुणांक या संशोधित सूचकांक (revised index) जिसे $\zeta(v_i)$ से दर्शाया जाता है, का उपयोग विकल्पों की रैंकिंग (ranking) निर्धारित करने के लिए किया जाता है, जो निम्नलिखित है:

$$\zeta(v_i) = \frac{D_{NS}(v_i, v^-)}{D_{max}(v_i, v^-)} - \frac{D_{NS}(v_i, v^+)}{D_{min}(v_i, v^-)} \quad (12)$$

जहां $D_{max}(v_i, v^-) = \max\left\{D_{NS}(v_i, v^-) : i = 1,2,3,...,n\right\}$

तथा $D_{min}(v_i, v^+) = \min\left\{D_{NS}(v_i, v^+) : i = 1,2,3,...,n\right\}$. $RC(v_i)$ या $\zeta(v_i)$ के अधिकतम मान के आधार पर दिए गए विकल्पों की रैंकिंग की जाती है, और इष्टतम हल (optimal solution) प्राप्त किया जाता है।

एल्गोरिथ्म (Algorithm):

इस उप–अनुभाग में, बहु–मानदंड निर्णयन की समस्या को हल करने के लिए एक एल्गोरिथ्म (algorithm) दिया गया है। यह एल्गोरिथ्म निम्नलिखित चरणों में काम करता है:

चरण 1: निर्णय आव्यूह (Decision Matrix) का निर्माण: पाइथागोरस अस्फुट संख्याओं के साथ बहु–मानदंड निर्णयन समस्या के लिए, एक निर्णय आव्यूह $R = \left(C_j(v_i)\right)_{m\times n}$ का निर्माण किया जाता है। यहां, $C_j(v_i)$ विकल्प v_i का मानदंड C_j के संबंध में मूल्यांकन (assessment) को दर्शाता है।

चरण 2: पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल की गणना: स्कोर फ़ंक्शन का उपयोग करके ये दोनों निर्धारित की जाती है।

चरण 3: भारित गोलाकार दूरी की गणना: समीकरण (9) और (10) का उपयोग करके, प्रत्येक विकल्प v_i की PyFPIS (v^+) और (v^-) से भारित गोलाकार दूरी की गणना की जाती है।

चरण 4: सापेक्ष निकटता और संशोधित निकटता की गणना: समीकरण (11) और (12) का उपयोग करके, विकल्प की सापेक्ष निकटता $\left(RC(v_i)\right)$ और संशोधित निकटता $\left(\zeta(v_i)\right)$ की गणना की जाती है।

चरण 5: विकल्पों की रैंकिंग और सर्वोत्तम विकल्प का चयन: चरण 4 से प्राप्त सापेक्ष निकटता $\left(RC(v_i)\right)$ और संशोधित निकटता $\left(\zeta(v_i)\right)$ के आधार पर विकल्पों को रैंक (rank) किया जाता है। $RC(v_i)$ या $\zeta(v_i)$ का मान जितना बड़ा होगा, कोई विकल्प v_i उतना ही अधिक वांछनीय (desirable) होगा। इस प्रकार सबसे बड़े $RC(v_i)$ या $\zeta(v_i)(i=1,2,3,...,m)$ वाले विकल्प को सर्वोत्तम (best) विकल्प के रूप में चुना जाता है।

दृष्टान्तीय उदाहरण

निम्नलिखित उदाहरण में, एक ग्राहक, एक उपर्युक्त स्मार्टफोन खरीदना चाहता है। उसके पास पांच ब्रांडेड स्मार्टफोन के विकल्प हैं: v_1, v_2, v_3, v_4 और v_5। इनमें से एक स्मार्टफोन खरीदने के लिए, वह चार मापदंडों (criteria) पर विचार करता है: कीमत (cost) (C_1), कैमरा (camera) (C_2), रैम (RAM) (C_3), और बैटरी (battery) (C_4)। इन मापदंडों के आधार पर, एक पाइथागोरेयन अस्फुट निर्णय आव्यूह (decision matrix) (तालिका 1) बनाया गया है, जो निम्नलिखित है :

तालिका 1: विभिन्न मापदंडों के आधार पर, एक पाइथागोरेयन अस्फुट निर्णय आव्यूह (Pythagorean fuzzy decision matrix) का निर्माण

मापदंड → ब्रांडस ↓	मूल्य C_1	कैमरा C_2	रैम C_3	बैटरी C_4
v_1	<0.7, 0.3>	<0.6, 0.4>	<0.7, 0.6>	<0.8, 0.3>
v_2	<0.6, 0.5>	<0.5, 0.6>	<0.6, 0.4>	<0.7, 0.5>
v_3	<0.5, 0.5>	<0.8, 0.4>	<0.7, 0.3>	<0.7, 0.4>
v_4	<0.5, 0.3>	<0.6, 0.7>	<0.6, 0.2>	<0.5, 0.6>
v_5	<0.4, 0.6>	<0.8, 0.1>	<0.5, 0.5>	<0.7, 0.3>

जहां $\langle 0.7, 0.3 \rangle$ यह दर्शाता है कि विकल्प v_1 कसौटी C_1 को कितना संतुष्ट करता है और कितना असन्तुष्ट करता है। यह मानते हुए कि फोन का कैमरा (camera), रैम (RAM) और बैटरी क्षमता (battery capacity) लाभकारी मापदंड (benefit criteria), $J_1 = \{C_2, C_3, C_4\}$ हैं, और फोन की कीमत (cost) लागत मापदंड (cost criteria), $J_2 = \{C_1\}$ है। इस प्रकार, निर्णय लेते समय कैमरे की गुणवत्ता, रैम और बैटरी क्षमता को अधिकतम करने की कोशिश की जाती है, जबकि फोन की कीमत को न्यूनतम करने की कोशिश की जाती है। इसके बाद, पाइथागोरेयन अस्फुट सकारात्मक आदर्श हल (v^+) और पाइथागोरेयन अस्फुट नकारात्मक आदर्श हल (v^-) की गणना की जाती है।

$$v^+ = \{\langle 0.4, 0.6 \rangle, \langle 0.8, 0.1 \rangle, \langle 0.7, 0.3 \rangle, \langle 0.8, 0.3 \rangle\}$$

$$v^- = \{\langle 0.7, 0.3 \rangle, \langle 0.6, 0.7 \rangle, \langle 0.5, 0.5 \rangle, \langle 0.5, 0.6 \rangle\}$$

फिर, तालिका 2 में प्रत्येक विकल्प (v_i) की इन सकारात्मक और नकारात्मक आदर्श हल से भारित गोलाकार दूरी की गणना की जाती है।

तालिका 2: विभिन्न विकल्प (v_i) की सकारात्मक और नकारात्मक आदर्श हल से भारित गोलाकार दूरी

	$D_{NS}(v_i,v^+)$	$D_{NS}(v_i,v^-)$
v_1	0.0550	0.040
v_2	0.048	0.033
v_3	0.026	0.049
v_4	0.065	0.026
v_5	0.012	0.063

अंत में, तालिका 3 में प्रत्येक विकल्प (v_i) की सापेक्ष निकटता $(RC(v_i))$ और संशोधित निकटता $(\zeta(v_i))$ ज्ञात की जाती है:

तालिका 3: विभिन्न विकल्प (v_i) की सापेक्ष निकटता $(RC(v_i))$ और संशोधित निकटता $(\zeta(v_i))$

	$RC(v_i)$ (Rank)	$\zeta(v_i)$ (Revised rank)
v_1	0.421	-3.948
v_2	0.407	-3.476
v_3	0.653	-1.388
v_4	0.285	-5.003
v_5	0.840	0

यहाँ हम देखते हैं कि, सापेक्ष निकटता (Relative index), $RC(v_i)$ के अनुसार, विकल्पों की रैंकिंग (ranking) इस प्रकार है: $v_5 > v_3 > v_1 > v_2 > v_4$, जिनमें से v_5 सबसे अच्छा विकल्प है। हालांकि, संशोधित सूचकांक, $\zeta(v_i)$ के अनुसार, विकल्पों की रैंकिंग इस प्रकार है: $v_5 > v_3 > v_2 > v_1 > v_4$ । यहां भी, सबसे अच्छा विकल्प v_5 ही है।

निष्कर्ष और भविष्य की संभावनायें

प्रस्तुत शोध पत्र में, पाइथागोरेयन अस्फुट समुच्चयों और आदर्श हल की समानता के आधार पर वरीयता क्रम की तकनीक (TOPSIS) के साथ गोलाकार दूरी मापन विधि का अपयोग करके स्मार्टफोन चयन जैसी समस्याओं को हल करने का एक आसाान और प्रभावी तरीका बताया गया है, जो अनिश्चितता को सटीक रूप से संभालकर निर्णय लेने में मदद करता है। भविष्य में इस विधि को और परिष्कृत किया जा सकता है। इसे स्वास्थ्य सेवा या शिक्षा जैसे क्षेत्रों में आजमाया जा सकता है। बड़े डेटा समूहों पर इसकी मापनीयता का परीक्षण किया जा सकता है।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थी हिन्दी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिन्दी शब्दावली
Decision Matrix	निर्णय आव्यूह
Fuzzy set	अस्फुट समुच्चय
Hesitation degree	संशय की कोटि
Imprecision	अपरिशुद्धता
Indeterminacy	अनिर्धार्यता की कोटि
Intuitionistic Fuzzy sets	अन्तर्ज्ञानवादी अस्फुट समुच्चय
Membership degree	सदस्यता कोटि
Multi Criteria Decision Making	बहु–मानदंड निर्णयन
Non-Membership degree	असदस्यता कोटि
Normalized Spherical Distance	सामान्यीकृत गोलाकार दूरी
Pythagorean Fuzzy Number	पाइथागोरेयन अस्फुट संख्या
Relative Closeness Coefficient	सापेक्ष निकटता गुणांक
Revised Closeness Coefficient	संशोधित निकटता गुणांक
Spherical Distance Measurement	गोलाकार दूरी मापन
Test of order of preference by similarity to ideal solution (TOPSIS)	आदर्श हल की समानता के आधार पर वरीयता क्रम की तकनीक
Weighted Normalized Spherical Distance	भारित सामान्यीकृत गोलाकार दूरी

सन्दर्भ

1. Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8, pp. 338-353.
2. Atanassov, K.T. (1986). Intuitionistic fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems, 20(1), pp. 87-96.
3. Yager, R.R. (2013). Pythagorean fuzzy subsets. Proceedings of Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting, IEEE, pp. 57-61.
4. Chen, T.Y. (2018). Remoteness index-based Pythagorean fuzzy VIKOR methods with a generalized distance measure. Information Fusion, 41, pp. 129-150.
5. Wei, G. and Wei, Y. (2018). Similarity measures of Pythagorean fuzzy sets based on cosine function and their applications. International Journal of Intelligent Systems, 33(3), pp. 634-652.
6. Ejegwa, P.A. (2020). Distance and similarity measures for Pythagorean fuzzy sets. Granular Computing, 5(2), pp. 225-238.
7. Adak, A.K., Nilkamal and Srivastava, K.N. (2023). New ranking approach to solve MCDM problems with generalized intuitionistic fuzzy information. In Advances in Decision Sciences, pp. 559-566.
8. Hwang, C.L. and Yoon, K. (1981). Multiple attribute decision making- methods and applications: a state-of-the-art survey. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg.
9. Yager, R.R. (2016). Properties and applications of Pythagorean fuzzy sets. In Pythagorean Fuzzy Sets: Theory and Applications, Springer, pp. 119-136.