शोध पत्र / **Research Paper**

परिवहन समस्या का प्रतिलोम इष्टतमीकरण
Inverse Optimization of Transportation Problem

नितिन आर्य

Nitin Arya

Department of Mathematics, Government Engineering College, Jhalawar (Rajasthan) INDIA
nitin.arya1234@gmail.com

https://doie.org/10.0228/VP.2025815936

सारांश

यह शोध पत्र परिवहन समस्या के प्रतिलोम संस्करण को हल करने की एक विधि प्रस्तुत करता है। एक परिवहन समस्या पर विचार किया गया है और दिए गए सुसंगत हल को इष्टतम बनाने के लिए इसकी लागत को यथासंभव कम समायोजित किया है। हमारे दावे की पुष्टि करने के लिए अंत में एक उदाहरण दिया गया है।

Abstract

This research paper presents a method to solve the inverse version of transportation problem. A transportation problem is considered and adjusted its costs as small as possible to make the given feasible solution to an optimal one. An example is given at the end to validate our claim.

मुख्य शब्दः प्रतिलोम इष्टतमीकरण, परिवहन समस्या, संशोधित वितरण विधि

Key Words: Inverse Optimization, Transportation Problem, Modified Distribution Method

परिचय

वास्तविक जीवन की विभिन्न समस्याओं को गणितीय प्रोग्रामन समस्या के रूप में तैयार किया जा सकता है और उपयुक्त तकनीकों का उपयोग करके हल किया जा सकता है। जब भी हम इन समस्याओं को गणितीय रूप से निरुपित करते हैं, तो यह माना जाता है कि समस्या से जुड़े सभी प्राचल सटीक रूप से ज्ञात हैं और हम ऐसा समाधान ढूंढना चाहते हैं जो प्राचलों के वर्तमान मूल्यों के लिए इष्टतम हो। हालाँकि, व्यवहार में, ऐसी कई स्थितियाँ होती हैं जब हम इन प्राचलों के बारे में बहुत अधिक निश्चित नहीं होते हैं या हमारे पास इन प्राचलों के केवल कुछ अनुमान होते हैं, लेकिन अवलोकन, प्रयोग या पूर्व अनुभवों से हमें इन समस्याओं का हल ज्ञात हो सकता है। ज्ञात हल दिए गए प्राचलों के वर्तमान मूल्यों के लिए इष्टतम हो भी सकता है और नहीं भी, इसलिए हमें दिए गए हल को इष्टतम बनाने के लिए इन प्राचलों को समायोजित करने की आवश्यकता है। इस समस्या को प्रतिलोम समस्या माना जा सकता है, लेकिन जब भी हम इष्टतम के बारे में बात करते हैं, तो हम हमेशा सर्वोत्तम हल की तलाश में रहते हैं यानी प्राचलों का समायोजन न्यूनतम होना चाहिए या इसके पीछे जुड़ी लागत न्यूनतम होनी चाहिए।

इस प्रकार एक इष्टतमीकरण समस्या में हम लागत गुणांक (c), दाएं पक्ष का सदिश (b) और प्रतिबन्ध मैट्रिक्स (A) के मूल्यों को देखते हुए निर्णय चर (x) के मूल्यों को ज्ञात करते हैं। प्रतिलोम इष्टतमीकरण समस्या में निर्णय चर (x) के मूल्यों को देखते हुए लागत गुणांक (c), दाई ओर के सदिश (b) और बाधा मैट्रिक्स (A)

के मूल्यों का अनुमान लगाते हैं। सामान्यतया, एक प्रतिलोम इष्टतमीकरण समस्या उन प्राचलों (लागत, क्षमता, यात्रा समय, आदि) के मूल्यों को खोजना है जो दिए गए समाधान को इष्टतम बनाते हैं और जो दिए गए प्राचलों से यथासंभव कम से कम भिन्न होते हैं।

गणितीय प्रोग्रामन समस्या के प्रतिलोम इष्टतमीकरण हेतु एक महत्वपूर्ण योगदान आहूजा और ऑरलिन [1] का था। उन्होंने सर्वप्रथम यह सिद्ध किया कि रैखिक प्रोग्रामन समस्या की l_1 व l_∞ नॉर्म के अन्तर्गत प्रतिलोम समस्या भी रैखिक प्रोग्रामन समस्या की होती है हालाँकि झांग और लियू [3] ने सबसे पहले प्रतिलोम रैखिक प्रोग्रामन समस्या को प्राप्त किया है और हुआंग और लियू [2] ने भी वही परिणाम प्राप्त किए हैं, लेकिन आहूजा और ऑरलिन द्वारा उपयोग किया जाने वाला दृष्टिकोण अधिक व्यापक है और इसका उपयोग कई प्रतिलोम इष्टतमीकरण समस्याओं को हल करने के लिए किया जा सकता है। ह्यूबर्गर, सी [4] ने विभिन्न प्रतिलोम समस्याओं, उनकी विधियों एवं परिणामों को संकलित रूप से प्रस्तुत किया। जैन एवं आर्य [5 –10] ने विभिन्न गणितीय प्रोग्रामन समस्यों जैसे क्षमतायुक्त परिवहन समस्या, भिन्नात्मक रैखिक प्रोग्रामन समस्या, द्विघात प्रोग्रामन समस्या एवं भिन्नात्मक परिवहन समस्या इत्यादि के प्रतिलोम इष्टतमीकरण मॉडल प्रस्तुत किये। जलीलज़ादेह, हामेदानी [11] अदलखा, कोवालास्की [12] द्वारा द्विघात परिवहन समस्या हेतु प्रतिलोम मॉडल पर कार्य किया गया।

परिवहन समस्या

परिवहन समस्या एक स्थान (जिसे मूल स्थान कहा जाता है) से दूसरे स्थान (जिसे गंतव्य कहा जाता है) तक माल भेजने की लागत को कम करना है, ताकि प्रत्येक आगमन क्षेत्र की ज़रूरतें पूरी हों और प्रत्येक शिपिंग स्थान अपनी क्षमता के भीतर संचालित हो।

यदि वहाँ m कारखाने या उत्पादन संयंत्र, $P_1, P_2, ..., P_m$ हैं, जो एक निश्चित वस्तु की आपूर्ति करते हैं, और वहाँ n बाज़ार या गोदाम, $W_1, W_2, ..., W_n$ हैं जहाँ इस वस्तु की आपूर्ति की जानी हैं। उत्पादन संयंत्र P_i वस्तु की मात्रा a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ उत्पन्न करता है, और गोदाम W_j को वस्तु की मात्रा b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ प्राप्त करनी हैं। मान लीजिए कि P_i से W_j तक वस्तु की एक इकाई के परिवहन की लागत c_{ij} है और P_i से W_j तक परिवहन की गई वस्तु की मात्रा x_{ij} है, तो एक परिवहन समस्या इस प्रकार तैयार की जा सकती है:

न्यूनतम $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$,

व्यवरोध $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \forall i = 1, 2, ..., m$

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \forall j = 1, 2, ..., n$

तथा $x_{ij} \geq 0, \forall\ i = 1, 2, ..., m, j = 1, 2, ..., n,$

यहाँ $\sum a_i = \sum b_j$

इस समस्या का सारणीबद्ध निरुपण इस प्रकार है:

तालिका–1 परिवहन समस्या

गोदाम→ कारखाने↓	W_1	W_2	$\cdots$	W_n	उपलब्धता
F_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	a_1
F_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
F_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	a_m
आवश्यकता	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

प्रस्तावित विधि

चरण–1 संशोधित वितरण (MODI) विधि का उपयोग करके दी गई परिवहन समस्या को हल करें।

चरण–2 यदि x_{ij}^* इष्टतम हल है, और मान लीजिए A*, x_{ij}^* के संगत सूचकांकों (i,j) के जोड़े का समुच्चय है, अर्थात, $A^* = \{(i,j) / x_{ij}^* > 0\}$

चरण–3 यदि x_{ij}^0 दिया गया सुसंगत हल है, और मान लीजिए कि A^0, x_{ij}^0 के संगत सूचकांकों (i,j) के जोड़े का समुच्चय है, अर्थात, $A^0 = \{(i,j) / x_{ij}^0 > 0\}$

चरण–4 A^0 / A^* की गणना करें, जहाँ A^0 / A^*, A^0 के उन सूचकांकों के सेट को दर्शाता है जो A* में नहीं हैं, अर्थात, $A^0 / A^* = \{(i,j) / (i,j) \in A^0, (i,j) \notin A^*\}$

चरण–5 प्रत्येक $(i,j) \in A^0 / A^*$ के लिए $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ का उपयोग कर $\bar{c}_{ij}$ ज्ञात करेंगे जहाँ c_{ij} इकाई परिवहन लागत है और संशोधित वितरण विधि में अंतिम परिवहन तालिका में प्राप्त इष्टतम द्वैत चर हैं।

चरण–6 संशोधित लागत की गणना करेंगे

$$d_{ij}^* = \begin{cases} c_{ij} - \bar{c}_{ij}, \ \forall (i,j) \in A^0 / A^* \\ c_{ij}, \ \forall (i,j) \notin A^0 / A^* \end{cases}$$

दृष्टान्तीय उदाहरण

निम्न परिवहन समस्या को प्रतिलोम इष्टतमीकरण की सहायता से हल कीजिये–

तालिका–2

तक → से ↓		गंतव्य			उपलब्धता ↓
		D_1	D_1	D_1	
आरंभ स्थान	O_1	16	20	12	200
	O_2	14	8	18	160
	O_3	26	24	16	90
माँग →		180	120	150	योग = 450

यदि $x^0 = \{x_{11}=180, x_{13}=20, x_{22}=120, \quad x_{23}=40, x_{33}=90\}$ दिया गया सुसंगत हल है तो हमें इस समाधान को इष्टतम बनाने के लिए संशोधित लागत ज्ञात करनी होगी। जिसके चरण इस प्रकार हैं:

चरण 1. संशोधित वितरण विधि का उपयोग करके समस्या का समाधान करते हुए हम निम्नानुसार अंतिम परिवहन तालिका प्राप्त करते हैं:

तालिका 3–संशोधित वितरण विधि का उपयोग करके परिवहन समस्या का इष्टतम हल

16 (140)	20 10	12 (60)	$u_1 = 0$
14 (40)	8 (120)	18 8	$u_2 = -2$
26 0	24 10	16 (90) 52	$u_3 = 4$
$v_1 = 16$	$v_2 = 10$	$v_3 = 12$	Z = 5920

जहां $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4$ इष्टतम दोहरे चर हैं। परिवहन तालिका में कोष्ठिकाओं के निचले दाएं कोने पर लिखी संख्याएं $\bar{c}_{ij}$ को दर्शाती हैं और $x^* = \{x_{11}=140, x_{13}=60, x_{21}=40, x_{22}=120, x_{33}=90\}$ न्यूनतम परिवहन लागत 5920 के साथ इष्टतम हल है।

चरण–2 इष्टतम हल $x^* = \{x_{11}=140, x_{13}=60, x_{21}=40, x_{22}=120, x_{33}=90\}$ के संगत $A^* = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,3)\}$ ज्ञात करेंगे

चरण–3 दिए गये सुसंगत हल $x^0 = \{x_{11}=180, x_{13}=20, x_{22}=120, x_{23}=40, x_{33}=90\}$ के संगत $A^0 = \{(1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ ज्ञात करेंगे

चरण–4 $A^0 / A^* = \{(i, j) / (i, j) \in A^0, (i, j) \notin A^*\} = \{(2,3\}$ ज्ञात करेंगे

चरण–5 $\bar{c}_{23} = c_{23} - u_2 - v_3 = 18 + 2 - 12 = 8$

चरण–6 संशोधित लागतों की गणना करें

$$d^*_{23} = c_{23} - \bar{c}_{23} = 18 - 8 = 10$$

MODI विधि की सहायता से संशोधित परिवहन समस्या का इष्टतम समाधान निम्नलिखित परिवहन तालिका में दिखाया गया है:

तालिका–4: संशोधित परिवहन समस्या का इष्टतम समाधान

16 (180)	20 10	12 (20)	$u_1 = 12$
14 0	8 (120)	10 (40)	$u_2 = 10$
26 0	24 0	16 (90)	$u_3 = 16$
$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 0$	Z = 5920

स्पष्ट रूप से, प्रत्येक खाली कोष्ठिका के निचले दाएं कोने पर लिखे गये सभी मान ($\bar{c}_{ij}$) अऋणात्मक हैं, जो दर्शाते हैं कि x^0 संशोधित परिवहन समस्या का एक इष्टतम समाधान है।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेज़ी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted Terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित समानार्थक हिंदी शब्दावली
Cell	कोष्ठिका
Feasible Solution	सुसंगत हल
Inverse Optimization	प्रतिलोम इष्टतमीकरण
Optimal	इष्टतम
Transportation Problem	परिवहन समस्या
Validate	पुष्टि करना

सन्दर्भ

1. Ahuja, R.K. and Orlin, J.B. (2001). Inverse Optimization. *Operations Research*, 49, 771-783.
2. Huang, S., Liu, Z. (1999). On the inverse problem of linear programming and its application to minimum weight perfect k-matching. *European Journal of Operational Research*, 112, 421–426.
3. Zhang, J., and Liu, Z. (1996). Calculating some inverse linear programming problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 72, 261-273.
4. Heuberger, C. (2004). Inverse combinatorial optimiza-tion: A survey on problems, methods and results. *Journal of Combinatorial Optimization*, 8 (3), 329–361.
5. Jain, S. and Arya, N. (2013). An Inverse Capacitated Transportation Problem. *IOSR Journal of Mathematics* 5(4) 24-27.
6. Jain, S. and Arya, N. (2013). On Inverse Linear Fractional Programming Problem. European Journal of Mathematical Sciences 2(3) 320-328.
7. Jain, S. and Arya, N. (2013). Inverse Optimization for Quadratic Programming Problems. International Journal of Operations Research Nepal 2, 49-56.
8. Jain, S. and Arya, N. (2013). An Inverse Transportation Problem with the Linear Fractional Objective Function. AMO- Advanced Modeling and Optimization 15(3), 677-687.
9. Jain, S. and Arya, N. (2013). A Type of Inverse Linear Fractional Programming Problem. Mexican Journal of Operations Research 2(2), 2-9.
10. Jain, S. and Arya, N. (2013). On Inverse Quadratic Programming Problems. Advances in Modelling Series A. General Mathematics 50(2), 55-71.
11. Jalilzadeh, A and Hamedani, E.Y.(2014). Inverse Quadratic Transportation Problem. https://doi.org/10.48550/arXiv.1409.6030.
12. Adlakha, V.; Kowalski, K.(2013). On the Quadratic Transportation Problem. Open Journal of Optimization. 2(3) 89–94.