शोध पत्र / **Research Paper**

पिडूरकर एवं अन्य शोधकर्ताओं (2021) द्वारा प्रकाशित शोध पत्र ''ऐसे आव्यूहों का निदर्शन जिनमें पंक्तियाँ समरूप हो/अदिश गुणन के रूप में हों'' पर टिप्पणी

A Comment on "Modelling to find Rank of a Matrix when rows are similar / in form of scalar multiple" Research Paper published by Pidurkar and other Researchers (2021)

अनिल माहेश्वरी[1], आदर्श मंगल[2] एवं कीर्ति वर्मा[3]

Anil Maheshwari[1], Adarsh Mangal[2] & Kirti Verma[3]

[1,2]Department of Mathematics, Engineering College Ajmer, INDIA
[3]Department of Engineering Mathematics,
Gyan Ganga Institute of Technology and Sciences, Jabalpur, INDIA
anil.knowledge@ecajmer.ac.in, dradarshmangal1@gmail.com, kirtivrm3@gmail.com
https://doie.org/10.0228/VP.2025607034

सारांश

पिडूरकर एवं अन्य ने वर्ष 2021 में ऐसे आव्यूहों की कोटि (Rank) ज्ञात करने के सूत्र प्रतिपादित किये जिन्हें उपरी त्रिभुजाकार आव्यूह (Upper Triangular Matrix) में परिवर्तित करने के बाद प्राप्त आव्यूह में कुछ पंक्तियाँ या तो समरूप हो या कुछ पंक्तियाँ किसी दूसरी पंक्ति के अदिश गुणन (Scalar Multiple) के रूप में हो | किन्तु शोधकर्ताओं ने कुछ विशिष्ट प्रकार की आव्यूहों पर ही इन सूत्रों की जांच कर सभी प्रकार की आव्यूहों के लिए इन सूत्रों के लागू होने का दावा कर दिया | इस शोध पत्र में, हम पिडूरकर एवं अन्य द्वारा प्रतिपादित सूत्रों की सीमाओं तथा कमियों की ओर ध्यान आकर्षित कर रहे हैं।

Abstract

In the year 2021, Pidurkar et al proposed formulae to find the rank of such matrices which after converting into an Upper Triangular Matrix (UTM), some rows are either identical or some rows are similar to some other row in the form of scalar multiple. But the researchers examined these formulae only on some specific types of matrices and claimed that these formulae are applicable for all types of matrices. In this research paper, we are drawing attention towards the limitations and shortcomings of the formulae propounded by Pidurkar et al.

मुख्य शब्द : आव्यूह की कोटि, सोपानक रूप, उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह, रैखिक बीजगणित, सदिश समष्टि

Keywords : Rank of a matrix, Echelon form, Upper Triangular Matrix, Linear Algebra, Vector Space

परिचय

रैखिक बीजगणित (Linear Algebra) में, किसी आव्यूह की कोटि इसके स्तंभों से जनित सदिश समष्टि (Vector Space) की विमा होती है। यह उस आव्यूह के रैखिकतः स्वतंत्र (Linearly Independent) स्तंभों की उच्चिष्ठ (Maximal) संख्या के संगत होती है। इसी प्रकार हम यह भी कह सकते हैं कि किसी आव्यूह की कोटि

इसकी पंक्तियों द्वारा विस्तृत सदिश समष्टि की विमा के सर्वसम होती है। अतः किसी भी अवस्था में किसी आव्यूह की कोटि उस आव्यूह में विद्यमान पंक्तियों तथा स्तंभों की संख्या से अधिक नहीं हो सकती। विज्ञान के विविध क्षेत्रों में किसी आव्यूह की कोटि से सम्बंधित अनुप्रयोग दृष्टिगत होते हैं। इसकी सहायता से रैखिक समीकरण निकाय का हल आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। किसी रैखिक समीकरण निकाय की संगतता/असंगतता (Consistency/Inconsistency) की पहचान आसानी से सुनिश्चित की जा सकती है। मयूरी एवं अन्य [3] ने समानता के कारकों के विश्लेषण एवं सघन बीजगणित (Dense Algebra) की समस्याओं पर उनके प्रभाव का

अध्ययन किया। कैम्पबेल एवं अन्य [1] ने अपने शोध कार्य में यह बताया कि नियंत्रण सिद्धांत (Control Theory) में किसी आव्यूह की कोटि का प्रयोग कर रैखिक निकाय के नियंत्रण योग्य अथवा विचार योग्य होने की जांच की जा सकती है।

किसी आव्यूह की कोटि (i) उपसारणिक विधि (Method of Minor) द्वारा, (ii) सोपानक रूप (Echelon Form) द्वारा, अथवा (iii) प्रसामान्य रूप (Normal Form) द्वारा ज्ञात की जा सकती है। ये सभी प्रचलित विधियां हैं। इनमें से उपसारणिक विधि उच्च क्रम के आव्यूहों के लिए व्यवहार्य नहीं मानी जाती है क्योंकि इस विधि से कोटि की गणना करने में समय ज्यादा लगता है तथा गणन क्रिया भी थोड़ी जटिल होती है। उपरोक्त तीनों विधियों में से सबसे अधिक वरीयता सोपानक रूप को ही दी जाती है। इस विधि में प्रारम्भिक पंक्ति रूपांतरणों का प्रयोग कर दिए गए आव्यूह को उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में परिवर्तित किया जाता है उसके बाद प्राप्त उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में अशून्य पंक्तियों की संख्या के आधार पर आव्यूह की कोटि ज्ञात की जाती है।

प्रारम्भिक संकल्पनाएँ

उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह– एक वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]$ उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह कहलाता है यदि $a_{ij} = 0, i > j$.

उदाहरणार्थ $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$

सोपानक रूप – एक आव्यूह सोपानक रूप का कहा जाता है, यदि

(i) प्रत्येक अशून्य पंक्ति में प्रथम अशून्य अवयव इकाई होना चाहिए। (यह शर्त आवश्यक नहीं मानी जाती है)

(ii) आव्यूह A की प्रत्येक पंक्ति, जिसका प्रत्येक अवयव शून्य हो; उस प्रत्येक पंक्ति के नीचे विद्यमान होगी जिसमें कम से कम एक अशून्य अवयव हो।

(iii) किसी पंक्ति में प्रथम अशून्य अवयव के पूर्व शून्यों की संख्या अगली पंक्ति में ऐसे शून्यों की संख्या से कम होती है।

सोपानक रूप से किसी आव्यूह की कोटि उस आव्यूह में विद्यमान अशून्य पंक्तियों की संख्या के बराबर होती है।

उदाहरणार्थ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

उपरोक्त आव्यूह सोपानक रूप में है जिसमें दो अशून्य पंक्तियाँ है। अतः इस आव्यूह की कोटि 2 है।

पिडूरकर एवं अन्य द्वारा प्रतिपादित सूत्र

पिडूरकर एवं अन्य [4] ने किसी भी क्रम के ऐसे आव्यूहों के लिए, जिनमें कुछ पंक्तियाँ या तो समरूप हो या कुछ पंक्तियाँ किसी अन्य पंक्ति के अदिश गुणन के रूप में विद्यमान हो; की कोटि ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र प्रतिपादित किये |

सूत्र 1 –

आव्यूह की कोटि = उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में अशून्य पंक्तियों की संख्या – {(उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में समरूप पंक्तियों की संख्या/उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में अदिश गुणज वाली पंक्तियों की संख्या) – 1}

सूत्र 2 –

आव्यूह की कोटि = आव्यूह में पंक्तियों की संख्या – {(आव्यूह में समरूप पंक्तियों की संख्या/आव्यूह में अदिश गुणज वाली पंक्तियों की संख्या) – 1}

पिडूरकर एवं अन्य द्वारा प्रतिपादित दोनों सूत्रों की कमियां

1. पिडूरकर एवं अन्य के अनुसार सूत्र 1 किसी भी क्रम की आव्यूह से प्राप्त उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह के लिए लागू किया जा सकता है। जबकि उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह केवल वर्ग आव्यूह ही हो सकता है।

2. दोनों ही सूत्रों में केवल अदिश गुणन की बात की गई है (जहाँ k एक अचर है)। जबकि व्यवहार में ऐसा नहीं है क्योंकि यदि k शून्य मान ग्रहण करता हो तो आव्यूह की कोटि इन सूत्रों के माध्यम से ज्ञात किये जाने पर भिन्न मान देगी। अतः k अशून्य अचर होना चाहिए।

3. ये दोनों सूत्र केवल उन्हीं आव्यूहों पर लागू होते हैं जिनमें प्रथम पंक्ति एवं अंतिम स्तंभ के अवयवों के अतिरिक्त शेष सभी अवयव शून्य हो। जबकि उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में ऐसा नहीं होता है। उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह की परिभाषानुसार अग्रग विकर्ण के नीचे सभी अवयव शून्य होने चाहिए किन्तु अग्रग विकर्ण के अवयवों का शून्य होना आवश्यक नहीं है। शोधकर्ताओं ने उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह की व्याख्या को अपने अनुसार प्रयुक्त किया है जो विधिसम्मत नहीं है।

उदाहरण

अब हम एक दृष्टान्तीय उदाहरण के द्वारा हमारे द्वारा दी जा रही टिप्पणी को समझाने का प्रयास कर रहे हैं।

निम्न आव्यूह की कोटि ज्ञात कीजिये :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & 4 & -12 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

उपसारणिक विधि : चूँकि आव्यूह A एक आयताकार आव्यूह है जिसमें 4 पंक्तियाँ तथा 5 स्तम्भ है। अतः दिए गए आव्यूह की कोटि $\rho(A) \le \min.(4,5)$

4 * 4 क्रम के सभी उपसारणिक का मान शून्य हैं अतः उपरोक्त आव्यूह की कोटि का मान 4 नहीं हो सकता। अब यदि 3 * 3 क्रम के किसी भी एक उपसारणिक का मान अशून्य प्राप्त होता है तो हम यह कह सकते हैं कि आव्यूह की कोटि का मान 3 है। यहाँ 3 * 3 क्रम के एक उपसारणिक $\begin{vmatrix} -3 & 9 & -6 \\ 4 & -12 & 8 \\ -3 & 10 & -4 \end{vmatrix}$ का मान अशून्य प्राप्त होता है अतः इस आव्यूह की कोटि का मान 3 होगा।

सोपानक रूप : दिया गया आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 6 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & -8 & 4 & -12 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\cong} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -8 & 4 & -12 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow \frac{R_1}{6} \qquad\qquad R_3 \rightarrow R_3 + 8R_1$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & -8 & 4 & -12 & 8 \\ 0 & 6 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \rightarrow R_4 - 6R_1 \qquad\qquad R_2 \leftrightarrow R_4$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \to \frac{R_4}{15} \qquad\qquad R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \to R_2 - 2R_3$$

$$\cong \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

अब दिया गया आव्यूह सोपानक रूप में समानीत हो चुका है जिसमें अशून्य पंक्तियों की संख्या 3 है अतः दिए गए आव्यूह की कोटि 3 है।

परन्तु यदि इसी उदाहरण को पिडूरकर एवं अन्य के अनुसार हल करने का प्रयास करें तो परिणाम की वैधता सत्यापित नहीं होती है |

सूत्र 1 के अनुसार आव्यूह उपरि त्रिभुजाकार होना चाहिए जबकि वास्तव में समानीत आव्यूह ऐसा नहीं है। सूत्र 2 के अनुसार

आव्यूह की कोटि = आव्यूह में पंक्तियों की संख्या − {(आव्यूह में समरूप पंक्तियों की संख्या / आव्यूह में अदिश गुणज वाली पंक्तियों की संख्या) − 1}

अतः आव्यूह की कोटि = 4 − {(0 − 1)} = 5

निष्कर्ष

पिडूरकर एवं अन्य द्वारा दिए गए दोनों सूत्र केवल कुछ विशिष्ट प्रकार के आव्यूहों पर ही लागू होते हैं। इन्हें वैश्विक स्तर पर सामान्यीकृत नहीं किया जा सकता है। अतः निष्कर्ष यह है कि

(i) यदि कोई पंक्ति किसी अन्य पंक्ति की अदिश गुणज हो तो वह गुणक (माना k) अशून्य वास्तविक संख्या होना चाहिए।

(ii) उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह होने के लिए आव्यूह का वर्ग आव्यूह होना नितांत आवश्यक है |

(iii) दिए गए आव्यूह को उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह में समानीत करने पर यदि प्रथम पंक्ति एवं अंतिम स्तम्भ को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हो तो ही पिडूरकर एवं अन्य द्वारा दिए गए सूत्र प्रभावी होते है अन्यथा नहीं।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेज़ी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted Terminology in English	**वर्णमाला अनुक्रमित समानार्थक हिंदी शब्दावली**
Consistency / Inconsistency	संगतता / असंगतता
Control Theory	नियंत्रण सिद्धांत
Echelon Form	सोपानक रूप
Linearly Independent	रैखिकतः स्वतंत्र
Maximal	उच्चिष्ठ
Normal Form	प्रसामान्य रूप
Scalar Multiple	अदिश गुणज
Upper Triangular Matrix	उपरि त्रिभुजाकार आव्यूह
Vector Space	सदिश समष्टि

सन्दर्भ

1. Campbell, S.L., Nichols, N.K. & Terrell, W.J. (1991). Duality, observability, and controllability for linear time-varying descriptor systems. *Circuits Systems and Signal Process* **10**, 455–470. https://doi.org/10.1007/BF01194883
2. Chen, R., (2011). The evaluation of matrix rank based on determinant-operation. Proceedings of 2011 International Conference on Electronics and Optoelectronics, Dalian, China, pp. V1-286-V1-288, doi: 10.1109/ICEOE.2011.6013102.
3. Joshi, M., Shrawankar, U. (2016). Analysis of factors of parallelism and their impact on Dense Algebra problems. IEEE International Conference on Engineering & Technology (ICETECH-2016), India.
4. Pidurkar, S.R., Singh, D. K.,Vaidya, N., Deshpande, A. (2021). Modelling to find Rank of Matrix when rows are similar / in form of scalar multiple. Journal of Physics: Conference Series, International Conference on Research Frontiers in Sciences (ICRFS 2021). doi:10.1088/1742-6596/1913/1/012125
5. Dass, H. K. (2011). Higher Engineering Mathematics. S Chand Publishing, New Delhi.
6. Srimanta Pal, Bhunia S.C. (2015). Engineering Mathematics. Oxford University Press.
7. Grewal, B.S. (2015). Higher Engineering Mathematics. Khanna Publishers, New Delhi.
8. Stephen Andrilli, David Hecker (2016). Elementary Linear Algebra (Fifth Edition), System of linear equations. https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/rank-of-a-matrix.