आज़ादी का अमृत महोत्सव

ISSN : 1549-523-X
UGC-CARE Listed Journal

वर्ष : 22, अंक 1, जनवरी – मार्च 2024
Vol. 22, No. 1, January-March 2024

G20
भारत 2023 INDIA
वसुधैव कुटुम्बकम्
ONE EARTH • ONE FAMILY • ONE FUTURE

विज्ञान प्रकाश
VIGYAN PRAKASH

विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी रिसर्च जर्नल
Research Journal of Science & Technology

लोक हिताय विज्ञानम्

लोक विज्ञान परिषद, दिल्ली
एवं
विश्व हिन्दी न्यास, न्यूयॉर्क
का प्रकाशन

ISSN : 1549-523-X, UGC-CARE Listed Journal

विज्ञान प्रकाश - विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी रिसर्च जर्नल, वर्ष : 22, अंक 1, जनवरी - मार्च 2024

VIGYAN PRAKASH : Research Journal of Science & Technology,Vol. 22, No. 1, January-March 2024

संस्थापक मुख्य सम्पादक / Founder Chief Editor

- **स्व. प्रो. राम चौधरी / Late Prof. Ram Chaudhari**
  54, Perry Hill Raod, Oswego, NY, 13126, USA

सलाहकार मण्डल / Advisory Board

- **डॉ. विजय कुमार सारस्वत / Dr. V. K. Saraswat**
  Member, NITI Aayog, Govt. of India &
  Chancellor, Jawaharlal Nehru University, New Delhi.
  Formerly, Secretary, Defence (R&D)
  & Scientific Adviser to Raksha Mantri
  & DG DRDO (Ministry of Defence).
  vk.saraswat@gov.in

- **प्रो. जगदीश नारायण / Prof. Jagdish Narayan**
  Distinguished Chair Professor & Director,
  NSF Center for Advanced Materials and
  Smart Structures, Dept. of Materials Science and
  Engineering,
  Centennial Campus, North Carolina State University,
  Raleigh, NC 27695-7907.
  J_Narayan@ncsu.edu

- **प्रो. अशोक झुनझुनवाला /** Prof. Ashok Jhunjhunwala
  Institute Professor, IIT Madras,
  E301 IITM Research Park, Chennai-600113
  ashok@tenet.res.in

- **डॉ. श्याम कुमार शुक्ल / Dr. Shyam K. Shukla**
  Executive Director, World Hindi Foundation
  44949 Cougar Circle, Fremont, CA 94539, USA
  shuklas@comcast.net

- **प्रो. आलोक कुमार / Prof. Alok Kumar**
  Department of Physics, State University of New York,
  Oswego, New York 13126
  Alok.kumar@oswego.edu

ऑनलाइन प्रदर्श (वैबसाइट) / Online Presence (Website)

- **दिव्या शर्मा / Divya Sharma**
  Designer's Bliss, Sydney, NSW, Australia
  www.designersbliss.com

मुद्रण सहयोग /Printing Support

- Rohit Kaushik, kaushik.rohit@gmail.com

मुख्य सम्पादक / Chief Editor

- **प्रो. ओम विकास / Prof. Om Vikas**
  Hon. Advisor, Bhartiya Vidya Bhavan, Delhi, President, Lok Vigyan Parishad
  Formerly, Director, ABV-Indian Inst. of IT & Management Gwalior;
  & Counsellor (S&T), Indian Embassy, Japan; & Sr. Dir., Ministry of Electronics & IT
  dr.omvikas@gmail.com

कार्यकारी सम्पादक / Executive Editor

- **प्रो. अनुपम शुक्ल / Prof. Anupam Shukla**
  Director, SVNIT, Surat, Gujarat-395007
  director@svnit.ac.in, dranupamshukla@gmail.com

सहयोगी सम्पादक / Associate Editors

- **प्रो. रंजन माहेश्वरी / Prof. Ranjan Maheshwari**
  Professor, Rajasthan Technical University, Kota
  ranjan@rtu.ac.in

- **प्रो. कृष्ण कुमार मिश्र / Prof. Krishna Kumar Mishra**
  Homi Bhabha Centre for Science Education, TIFR, Mumbai-400088
  kkm@hbcse.tifr.res.in

- **प्रो. प्रतापानंद झा / Prof. Pratapanand Jha**
  Dean (Academics) and Director (Cultural Informatics) IGNCA, New Delhi
  pjha@ignca.nic.in

- **प्रो. अवनीश कुमार / Prof. Avanish Kumar**
  Dept. of Math Science & Computer Application,
  Bundelkhand University, Jhansi-284128
  dravanishkumar@gmail.com

- **डॉ. देबाशीस दत्ता /** Dr Debashis Dutta
  Chief Scientist & Executive Vice President, Strategic Initiatives Jio Platform
  Limited, Navi Mumbai, Maharashtra - 400701
  Debashis.Dutta@ril.com

प्रबन्ध सम्पादक / Managing Editor

- **डॉ. आदर्श मंगल / Dr. Adarsh Mangal**
  Dept. of Mathematics, Engineering College, Ajmer-305025
  dradarshmangal@vigyanprakash.in

सहायक सम्पादक / Assistant Editors

- **डॉ. राहुल दीक्षित / Dr. Rahul Dixit**
  Department of CSE, IIIT Pune
  rahuldixit@iiitp.ac.in

- **डॉ. कात्यायनी शर्मा /** Dr Katyayanee Sharma
  Joint programs in Medical Technologies, AIIMS Jodhpur & IIT Jodhpur
  katyayaneesharma@gmail.com

विश्व हिन्दी न्यास से संस्थापित एवं लोक विज्ञान परिषद, दिल्ली द्वारा प्रकाशित

UGC-CARE समिति से अनुमोदित हिन्दी में विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी रिसर्च जर्नल – **विज्ञान प्रकाश**

ISSN : 1549-523-X; www.VigyanPrakash.in

विज्ञान प्रकाश रिसर्च जर्नल में प्रकाशित लेख/सामग्री लेखकों के अपने निजी विचार हैं। **विज्ञान प्रकाश** के संपादक मंडल तथा प्रकाशक का कोई दायित्व नहीं है।

UGC-CARE Listed Research Journal ISSN: 1549-523-X

विज्ञान प्रकाश : विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी रिसर्च जर्नल, वर्ष : 22, अंक 1, जनवरी – मार्च 2024

VIGYAN PRAKASH : Research Journal of Science & Technology, Vol. 22, No. 1, January-March 2024

(www.VigyanPrakash.in)

विषय क्रम

- सलाहकार एवं सम्पादक मण्डल /**Advisory & Editorial Board** — Inner Cvr
- सम्पादकीय / **Editorial** भारतीय संस्कारों में निहित गुणवत्ता आश्वासन सिद्धान्त / **Quality Assurance Principles Rooted in Indian Sanskaras** – प्रतापानंद झा — 2

शोध आलेख / Research Articles

- सायकल टेम्पो, तगुचि एवं एनोवा का उपयोग कर एक अतिक्रांतिक तापीय शक्ति संयंत्र का ऊष्मागतिकीय निदर्शन एवं इष्टतमीकरण / **Thermodynamic Modeling and Optimization of a Supercritical Coal Fired Thermal Power Plant using Cycle Tempo, Taguchi and ANOVA** — 5
  – डॉ. एस. एस. एल. पटेल एवं पी. पटेल
- आवेश के प्रेरण व चर घनत्व द्वारा गोलाकार रूप से सममित पिंड के गुरुत्वीय निपात की रोकथाम / **Halting of Gravitational Collapse for a Spherically Symmetric Object by Induction of Charge and Variable Density** — 14
  – अनिल माहेश्वरी एवं एम. के. गोखरू
- गुणन – **T** सहमानक के अंतर्गत प्रति – अस्फुट उपवलय / **On Anti-Fuzzy Subring Under Product T- Conorm** — 21
  – संजीत कुमार एवं मनोरंजन कुमार सिंह
- गामा फलनों के योग के पदों वाले सामान्यीकृत $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला / **Summation Series Of Generalized $\bar{H}$- Function Having The Sum In Terms Of Gamma Functions** — 28
  – आकिब हामिद डार, भारती सक्सेना, कीर्ति वर्मा एवं रमाकांत भारद्वाज

भारतीय ज्ञान परम्परा / Indian Knowledge Tradition

- संस्कृत कैसे सीखें ? / How to Learn Sanskrit? — 46
  – आकृति ठाकुर एवं योगेश शर्मा

पुस्तक समीक्षा / Book Review

- **Anecdots From The History Of Modern Computing— V.Rajaraman** — 53

प्रतिक्रियाएं / **Feedback** — 55

समीक्षक सूची / **List of Reviewers** — Back Inner Cvr

श्री लक्ष्मणाचार्य की संस्कृत रचना 'नामरामायण' से — Back Cvr

विज्ञान प्रकाश रिसर्च जर्नल में प्रकाशित लेख/सामग्री लेखकों के अपने निजी विचार हैं।
विज्ञान प्रकाश के सम्पादक मंडल तथा प्रकाशक का कोई दायित्व नहीं हैं।

भारतीय संस्कारों में निहित गुणवत्ता आश्वासन सिद्धान्त

Quality Assurance Principles Rooted in Indian Sanskaras

https://doie.org/10.0121/VP.2025374725

वैश्विक बाजार के औद्योगिक प्रतिस्पर्धा में बने रहने के लिए औद्योगिक रणनीति और गुणवत्ता के बीच सामंजस्य सुनिश्चित करना अत्यन्त महत्त्वपूर्ण हो गया है। कई उद्योगों में सफलता के लिए प्रभावी गुणवत्ता प्रबंधन प्रणालियां आवश्यक हैं। इन प्रणालियों में गुणवत्ता आश्वासन एक महत्त्वपूर्ण घटक है।

गुणवत्ता का तात्पर्य है, किसी वस्तु की एक बोधगम्य विशेषता, जिससे उसे पहचाना जा सके। यह एक सामान्य शब्द है, जो किसी भी गुण या विशेषता पर लागू होता है। गुण से तात्पर्य, किसी वस्तु की प्रकृति से संबंधित विशेषता से है और इसका उपयोग किसी प्रकार या प्रजाति का वर्णन करने के लिए किया जा सकता है। शब्दकोश के अनुसार, गुणवत्ता का अर्थ हैः किसी वस्तु/सेवा की उत्कृष्टता या श्रेष्ठता का स्तर, किसी वस्तु/सेवा की मूलभूत उत्कृष्टता या श्रेष्ठता, किसी वस्तु/सेवा की विशेषताएं और विशेषताओं की समग्रता। किसी वस्तु/सेवा की विशिष्ट और अनोखी गुणवत्ता किसी वस्तु/सेवा को वह बनाती है, जो वह है।

गुणवत्ता प्रबंधन, किसी संगठन को उच्च गुणवत्ता वाले उत्पाद और सेवाएं देने में सहायता करता है। यह संगठन की प्रक्रियाओं में दक्षता बढ़ाता है, अपव्यय को कम करता है, और समय एवं अन्य संसाधनों के प्रयोग में सुधार करता है। गुणवत्ता प्रबंधन से ग्राहकों की संतुष्टि बढ़ती है, लागत कम होती है, और बेहतर निर्णय लेने की संभावनाएं बढ़ जाती है। यह संगठन को एक सशक्त ब्रांड अथवा छवि बनाने में भी सहायता करता है। गुणवत्ता प्रबंधन प्रणाली के चार मुख्य चरण हैंः

1. गुणवत्ता नियंत्रण योजना (Quality Control Plan)ः इसके अंतर्गत अपने गुणवत्ता लक्ष्यों और मानकों की पहचान की जाती है, तत्पश्चात् इन मानकों को पूरा करने के लिए अनिवार्य आवश्यकताओं को प्राप्त करने के लिए उपयुक्त प्रक्रियाओं पर विचार किया जाता है।
2. गुणवत्ता नियंत्रण (Quality Control या QC)ः इसमें योजना चरण में निर्धारित उत्पादों का भौतिक निरीक्षण और परीक्षण किया जाता है, जिससे यह सुनिश्चित किया जा सके कि वह प्राप्त करने योग्य है या नहीं।
3. गुणवत्ता आश्वासन (Quality Assurance या QA)ः इसके अंतर्गत सेवाओं की वितरण प्रक्रिया या वस्तुओं के गुणवत्ता प्रबंधन विनिर्माण की प्रक्रियाओं की समीक्षा की जाती है।
4. गुणवत्ता सुधार (Quality Improvement)ः इसमें पिछले 3 चरणों से प्राप्त निष्कर्षों की गहन समीक्षा कर और आगे बढ़ने के लिए पूर्वप्रयुक्त पद्धतियों को और बेहतर बनाने की दिशा में विचार किया जाता है।

गुणवत्ता नियंत्रण का उद्देश्य गुणवत्ता संबंधी त्रुटियों को पकड़ना है, जबकि गुणवत्ता आश्वासन का उद्देश्य उन समस्याओं को प्रकाश में लाना और उन्हें ठीक करना है जो गुणवत्ता संबंधी त्रुटियों का कारण बनती हैं।

गुणवत्ता आश्वासन एक व्यवस्थित विधि है, जिसका प्रयोग यह सुनिश्चित करने के लिए किया जाता है कि कोई उत्पाद या सेवा निर्दिष्ट मानकों और आवश्यकताओं को पूर्ण करे। इसमें वांछित परिणाम से दोष, त्रुटि या विचलन को रोकने के लिए प्रक्रियाओं और गतिविधियों का कार्यान्वयन सम्मिलित है। गुणवत्ता विफलताओं को रोकने के लिए गुणवत्ता आश्वासन एक व्यापक प्रक्रिया है। गुणवत्ता आश्वासन प्रक्रिया किसी व्यवसाय को यह सुनिश्चित करने में सहायता करती है कि उसके उत्पाद, कंपनी या उसके उद्योग द्वारा

निर्धारित गुणवत्ता मानकों को पूरा करते हैं या नहीं। इसे प्रभावी बनाने के लिए, गुणवत्ता आश्वासन का स्वतंत्र ऑडिट के माध्यम से नियमित रूप से परीक्षण कराया जाना चाहिए। साथ ही, सर्वोत्तम परिणामों के लिए, ऑडिट को किसी तीसरे पक्ष द्वारा पूर्ण करवाना, जो परियोजना में वित्तीय या भावनात्मक रूप से निवेशित न हो, आवश्यक है।

गुणवत्ता आश्वासन कार्यान्वयनकर्ता की भूमिका कंपनी और उद्योग के अनुसार अलग–अलग होती है। उदाहरण के लिए सॉफ्टवेयर कंपनी में संलग्न एक गुणवत्ता आश्वासन इंजीनियर के कार्य–विवरण में उपयोगिता परीक्षण, सुविधा परीक्षण, सिस्टम परीक्षण, एकीकरण परीक्षण, उत्पाद का परीक्षण करने के लिए स्वचालित स्क्रिप्ट पर आधारित परीक्षण योजनाओं का निर्माण, एवं गुणवत्तापूर्ण सॉफ्टवेयर कोड सुनिश्चित करने के लिए मानक विकसित करना आदि।

मनुष्य इस सृष्टि की सर्वश्रेष्ठ कृति है। जो मानव धर्म का पालन करे एवं जिसके हृदय में करुणा का अपार सागर हो, वही मनुष्य है। यह करुणा ही वह प्रमुख बीज है, जो किसी के मनुष्य होने का कारण है। मनुष्य की पहचान उसके कर्मों से होती है और उसे अपने कर्मों के अनुसार ही फल मिलता है। अच्छे कर्मों से मनुष्य समाज में सम्मान प्राप्त कर सकता है। मनुष्य के कर्म उसके जीवन की दिशा निर्धारित करते हैं। अच्छे कर्मों एवं गुणों से युक्त मनुष्य बनाने के लिए, अच्छे संस्कारों का समायोजन समयानुसार करने का प्रावधान भारतीय ऋषियों ने आरंभ में ही कर दिया था। संस्कार शब्द का अर्थ है पूर्ण करना, संस्कृत करना और परिष्कृत करना।

भारतीय परम्परा में संस्कार की व्यवस्था व्यक्तित्व के परिष्करण एवं समाज में समरसतापूर्ण सन्तुलन की दृष्टि से अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है। यह सृष्टि के सन्तुलन की दृष्टि से भी महत्त्वपूर्ण है। संस्कारों की व्यवस्था में एक प्रकार का नैरन्तर्य है। कुछ संस्कार जन्म के पूर्व होते हैं, कुछ जन्म और मृत्यु के मध्य तथा कुछ मृत्यु के बाद भी । यह बात प्रामाणिक है कि मनुष्य का जीवन जन्म और मृत्यु के मध्य की स्थिति मात्र नहीं है। यह जन्म के पूर्व भी है और मृत्यु के बाद भी। इस आधार पर पुनर्जन्म की स्थिति भी प्रमाणित होती है। इस विमर्श से एक बात निकलकर आती है, कि संस्कार किसका होता है – स्थूल शरीर रूप व्यक्ति या व्यक्ति के चित्त का। इसका उत्तर सम्भवतः संस्कारों के वर्गीकरण द्वारा स्वतः ही प्राप्त हो जाता है, कि संस्कार चित्त का होता है। तभी तो संस्कारों की स्थिति जन्म से पूर्व और बाद में भी होती है। संस्कारसम्पन्न जीवन का सुपरिणाम व्यक्ति और समाज के क्रियात्मक व्यापार में परिलक्षित होता है। यदि कार्य सुफलित एवं सुपरिणमित है, तो यह अनुमानसिद्ध है कि वह व्यक्ति अथवा समाज संस्कारान्वित होगा। यह ठीक वैसी ही बात है, जैसे प्रवीण व्यक्ति के द्वारा वीणा–वादन की मनोरम प्रस्तुति। क्योंकि वह वीणा–वादन के संस्कार से संस्कृत है, वह जैसे ही वीणा के तारों को अंगुलियों से छेड़ता है, वैसे ही वीणा के झंकृत तारों से सबका हृदय भी झंकृत हो जाता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि वह सङ्गीत के संस्कार से सिद्ध है। यही स्थिति हमारे वैयक्तिक एवं सामाजिक जीवन की होती है। संस्कारान्वित व्यक्ति एवं समाज प्रत्यक्ष एवं परोक्ष दोनों ही स्थितियों में पुष्पान्वित एवं फलान्वित कार्य के सम्पादन में निसर्गतः सिद्ध होते हैं। तभी तो कालिदास भी कहते हैं –

> **"फलानुमेयाः प्रारम्भाः संस्काराः प्राक्तना इव"** (रघुवंश, 1/20)
>
> अर्थात् फल से अनुमेय आरम्भ होता है और संस्कारों से प्रारब्ध ।

संस्कार व्यक्ति और समाज के एकीकरण की व्यवस्था के रूप में भी देखे जा सकते हैं। संस्कार समाज की उपस्थिति में व्यक्ति का होता है, जिसके पश्चात् वह सामाजिक बनता है। यही स्थिति नाट्य में सहृदय अथवा सामाजिक की होती है, जिसके लिए आवश्यक है कि वह काव्यानुशीलित एवं अलङ्कार, भाव और रस के संस्कारों से संस्कृत हो। जैसे जब

सभी सामाजिकों का अनुभव समान हो जाता है और सभी ओर आनन्दैकघन की स्थिति हो जाती है, वैसे ही संस्कारान्वित सामाजिकों से समरसतापूर्ण समाज का निर्माण होता है।

जिस प्रकार अनेक रंगों के समुचित/सम्यक् उपयोग करने पर चित्त में सुन्दरता, आकर्षण और पूर्ण वास्तविकता आ जाती है, उसी प्रकार शास्त्रोपदिष्ट अनेक संस्कार करने से पुरुष की बुद्धि और मन में सात्त्विकता एवं सर्वजनप्रियता का सञ्चार होता है और उसको वास्तविक सुख–शान्ति के पथ का अनुभव होता है।

चित्रकर्म यथानेकै रङ्गै रुन्मील्यते शतैः ।
ब्राह्मण्यमपि तद्वत् स्यात् संस्कारैर्विधिपूर्वकैः ।।
(अंगिरास्मृति)

संस्कारों की संख्या सामान्यतः 16 स्वीकार की गई है। संस्कारप्रकाश ग्रन्थ के अनुसार वे इस प्रकार हैं–

1. गर्भाधान
2. पुंसवन
3. सीमन्तोन्नयन
4. जातकर्म
5. नामकरण
6. निष्क्रमण
7. अन्नप्राशन
8. चूडाकरण
9. विद्यारम्भ/अक्षरारम्भ
10. कर्णवेधन
11. उपनयन
12. वेदारम्भ
13. समावर्तन
14. विवाह
15. विवाहाग्निपरिग्रह / त्रेताग्निसंग्रह
16. अन्त्येष्टि

जब हम इन संस्कारों में निहित प्रक्रिया एवं उसके प्रतिपादन के लिए निर्धारित समय को देखते हैं तो इनकी वैज्ञानिकता का आभास होता है। यह व्यवस्थित विधि सुनिश्चित करती है कि इस प्रक्रिया से गुजरने के बाद एक व्यक्ति सर्वगुणसंपन्न मनुष्य बन सके, जो अपने उत्कृष्ट सेवा से समाज का कल्याण करे। यह आज के गुणवत्ता प्रबंधन के गुणवत्ता आश्वासन प्रक्रिया एवं सिद्धान्त से किसी भी प्रकार भिन्न नहीं है।

पिछले दिनों घटित बांग्लादेश का आन्दोलन हो या रूस–यूक्रेन का वर्षों से चल रहा युद्ध, इजरायल–फिलिस्तीन का युद्ध हो या इराक–ईरान का समर आदि, ये सभी घटनाएं मानवता की वास्तविक प्रकृति के विरुद्ध हैं। अच्छे समाज निर्माण के लिए मनुष्य का चरित्र निर्माण अत्यन्त आवश्यक है। इसके लिए भारतीय परम्परा में वर्णित सोलह संस्कारों का पुनरवलोकन एक समुचित समाधान है।

...प्रतापानंद झा

सायकल टेम्पो, तगुचि एवं एनोवा का उपयोग कर एक अतिक्रांतिक तापीय शक्ति संयंत्र का ऊष्मागतिकीय निदर्शन एवं इष्टतमीकरण

Thermodynamic Modeling and Optimization of a Supercritical Coal Fired Thermal Power Plant using Cycle Tempo, Taguchi and ANOVA

डॉ. एस. एस. एल. पटेल[1], पी. पटेल[2]
Dr. S. S. L. Patel[1], P. Patel[2]
[1]Principal, Govt. Polytechnic Korba, Chhattisgarh, India
[2]M. Tech Scholar, Mechanical Engineering, I. I. T. Kharagpur, West Bengal, India
[1]sslpatel@gmail.com; [2]poojyapreetpatel3@ gmail.com
https://doie.org/10.0121/VP.2025350579

सारांश

इस शोध पत्र में, 660 MW के कोयला दाहित अतिक्रांतिक तापीय शक्ति संयंत्र का 'सायकल टेम्पो 5' द्वारा विकसित ऊष्मागतिकीय निदर्श के माध्यम से विभिन्न प्रचालन परिस्थितियों में एक्सर्जी दक्षता की जाँच की गई है। अधिकतम एक्सर्जी दक्षता प्राप्त करने हेतु इष्टतम प्रचालन परिस्थिति ज्ञात करने के लिए तीन प्रमुख प्रचालन कारकों (संघनित्र दाब, मुख्य भाप तापमान एवं पुनस्तापन तापमान) का इष्टतम मान तगुचि (Taguchi) अभिकल्पन विधि का उपयोग करके ज्ञात किया गया। तीन चयनित कारकों के प्रत्येक के तीन स्तरों/मानों के साथ प्रचालन अवस्थाओं की योजना L_9 आर्थोगोनल श्रृंखला समूह (Orthogonal array) के रूप में की गई। एक–एक प्राचल के प्रभावों की अलग–अलग जाँच सिग्नल–टू–नॉइस अनुपात (Signal-to-noise S/N ratio) विश्लेषण एवं एनालिसिस ऑफ वेरिएन्स (ANOVA) के द्वारा की गई। अध्ययन के निष्कर्ष ये दर्शाते हैं कि कुल प्रभाव में 83.43% की अंशदान (Contribution) के साथ संघनित्र दाब संयंत्र की एक्सर्जी दक्षता पर सर्वाधिक प्रभावकारी प्राचल है एवं इसके बाद 12.99% की सहभागिता के साथ मुख्य भाप के तापमान का स्थान आता है। अंत में विश्लेषण के विधिमान्यता की जाँच की गई एवं परिणाम सत्यापित किया गया।

Abstract

In this paper the exergy efficiency of a 660MW coal fired supercritical thermal power plant under various operating conditions have been investigated through a thermodynamic model of the plant developed by using Cycle Tempo 5. Operating condition for maximization of exergy efficiency is optimised through the application of Taguchi design method by using three factors namely condenser pressure, main steam temperature and reheat temperature. The operating conditions are planned with three levels of each of selected three factors as the orthogonal array of L_9. The effects of individual parameters are investigated by signal-to-noise (S/N) ratio analysis and analysis of variance (ANOVA). Findings of the study reveals that condenser pressure is the most dominating parameter on plant exergy efficiency with a contribution of 83.43% followed by main steam temperature with 12.99%. As the analysis says that, the parameter with highest F- value will have maximum impact on response variable, the same has been checked by confirmation test. Thus, the result of analysis is checked and validated.

मुख्य शब्द : एनालिसिस ऑफ वेरिएन्स (ANOVA), इष्टतमीकरण, आर्थोगोनल श्रृंखला समूह, सिग्नल–टू–नॉइस (S/N) अनुपात, तगुचि, ऊष्मागतिकीय निदर्श.

Keywords: Analysis of Variance (ANOVA), optimization, orthogonal array, signal-to-noise (S/N) ratio, Taguchi, thermodynamic model.

परिचय

रविन्द्र कुमार एवं अन्य [1] ने एक प्राचलिक (Parametric) अध्ययन में अवक्रांतिक (Subcritical), अतिक्रांतिक (Supercritical) एवं परा–अतिक्रांतिक (Ultra-supercritical) कोयला दाहित शक्ति संयंत्रों में भाप तापमान को 600^{o}C, पुनस्तापन तापमान को 537^{o}C एवं संघनित्र दाब को 0.09 bar पर स्थिर रखकर भाप निष्कर्षण दाबों का इष्टतम मान ज्ञात करने हेतु सायकल टेम्पो 5 अनुरूपण सॉफ्टवेयर का उपयोग कर संयंत्र को अनुरूपित किया। उन्होंने एक पुनस्तापक के साथ आठ चरणों वाली भरण जल तापन व्यवस्था पर विचार करते हुए अवक्रांतिक, अतिक्रांतिक एवं परा–अतिक्रांतिक शक्ति संयंत्र के चक्रों की तापीय दक्षता क्रमशः 40.40%, 42.48%, और 43.03% प्राप्त की।

रविन्दर कुमार एवं अन्य [2] ने एक अध्ययन में 250 MW के एक अवक्रांतिक, पुनस्तापक, पुनर्जनक युक्त कोयला दाहित तापीय शक्ति संयत्र को विभिन्न भारों पर अनुरूपित किया। निदर्शन में मुख्य रूप से द्रव्यमान एवं ऊर्जा संतुलन समीकरणों का उपयोग किया गया। संयंत्र से संग्रहित आवश्यक आंकड़ों का उपयोग उसके विश्लेषण में किया गया। भाप जनित्र, टरबाइन, पम्प, संघनित्र एवं भरण जल तापकों को एकीकृत कर तैयार अनुरूपित निदर्श को मैटलैब (MATLAB) गणना साफ्टवेयर के द्वारा सफलतापूर्वक चलाया गया। 250 MW क्षमता वाली संयंत्र के लिए भार की विभिन्न अवस्थाओं में उसके वास्तविक प्रचालन की स्थिति में सकल संयंत्र दक्षता, कोयला खपत दर एवं भाप प्रवाह दर के मानों की तुलना निदर्श के संचालन से प्राप्त संगत मानों से करके अनुरूपित निदर्श का विधिमान्यकरण किया गया। अनुरूपित निदर्श से प्राप्त परिणाम संतोषप्रद थे।

एक शोध कार्य जिसका मुख्य उद्देश्य विद्यमान अवक्रांतिक शक्ति संयंत्र की दक्षता में वृद्धि करना था, चन्द्रशेखरन एवं अन्य [3] ने बॉयलर की इकाइयाँ जैसे मितोपयोजित्र, ड्रम एवं अतितापक का सांख्यिकीय निदर्श तैयार किया। विकसित निदर्श की प्रभावशीलता को R^2 एवं ANOVA विश्लेषण विधियों के द्वारा जाँचा गया। उन्होंने परिवर्तनशील प्रक्रम प्राचल (तापमान) का निदर्श के विभिन्न परिवर्तनशील चरों पर निर्भरता का विश्लेषण किया। निदर्श का विधिमान्यकरण त्रुटि विश्लेषण के द्वारा तथा प्रक्रम प्राचलों का इष्टतमीकरण डिजाइन ऑफ एक्सपेरिमेन्ट्स (Design of Experiments) के साथ रिस्पांस सरफेस मेथोडोलॉजी (Response Surface Methodology, RSM) के द्वारा किया गया। अलग–अलग निदर्शों तथा एकीकृत निदर्श का उपयोग करके कोयला दाहित तापीय शक्ति संयंत्र के भाविष्यिक नियंत्रण (Predictive control) का अध्ययन एवं अभिकल्पन किया गया।

डु जेंघुई [4] ने एक शोध में बॉयलर तापीय निकाय के पूर्व के प्रचालन आंकड़ों का उपयोग करके उच्च–सटीकता वाला मात्रात्मक निदर्श स्थापित किया। इस विधि से वास्तविक निकाय के निदर्शन में आने वाली अनेक कठिनाइयों से बचा जा सका तथा विधि से तापीय शक्ति संयंत्र में तापीय स्वचालन नियंत्रण निकाय के अभिकल्पन और इष्टतमीकरण के लिए मजबूत संदर्भ प्राप्त होता है।

तापीय शक्ति संयंत्रों के निष्पादन के इष्टतमीकरण के लिए तगुचि एवं एनोवा विधियों का उपयोग करने वाले प्रमुख शोध कार्यों का संक्षिप्त विवरण लेखक ने अपने शोध पत्र [5] में दिया है। मित्रा एवं सरकार [6] ने तगुचि S/N अनुपात एवं ANOVA का उपयोग कर शक्ति संयंत्र की एक्सर्जी दक्षता पर वातावरणीय

तापमान, संघनित्र दाब एवं मुख्य भाप के तापमान के प्रभाव का अध्ययन किया। उन्होंने भाप तापमान को सबसे प्रभावशील कारक के रूप में पाया तथा इसके बाद वातावरणीय तापमान था। बेसाल एवं अन्य [7] तथा मित्रा एवं सरकार [8] ने पुन: तीन प्राचल वातावरणीय तापमान, संघनित्र दाब तथा भाप तापमान पर विचार करते हुए प्रत्येक के तीन स्तरों को लेकर प्रचालन अवस्थाओं की योजना बनाई और प्रत्येक अवस्था हेतु तापीय शक्ति संयंत्र की एक्सर्जी दक्षता की जाँच की। उन्होंने S/N अनुपात विश्लेषण एवं एनालिसिस ऑफ वेरिएन्स (ANOVA) तथा रिग्रेसन (Regression) विश्लेषण किया और एक–एक प्राचल के प्रभावों को ज्ञात किया। वातावरणीय तापमान सर्वाधिक प्रभावकारी प्राचल पाया गया। उन्होंने परिणामों की पुष्टि भी की तथा प्रचालन अवस्थाओं के इष्टतमीकरण के लिए तगुचि अभिकल्पन को एक सफल विधि के रूप में पाया। जामिल एवं अन्य [9] ने लागत फलन (Cost function) में सम्मिलित प्राचलों का इष्टतम स्तर प्राप्त करने हेतु तगुचि विधि का उपयोग किया था। कई स्रोतों से विद्युत उत्पादन के लिए उपकरण क्षमताओं के इष्टतम आवंटन हेतु तगुचि विधि का उपयोग वांग एवं अन्य [10] ने किया।

मेथोडोलॉजी

इस शोध कार्य के विभिन्न चरण निम्नानुसार हैं -

(i) **संयंत्र का ऊष्मागतिकीय निदर्शन एवं अनुरूपण** –सायकल टेम्पो 5.0 अनुरूपण सॉफ्टवेयर का उपयोग कर संयंत्र का ऊष्मागतिकीय निदर्श तैयार करने तथा अनुरूपण की विधि का वर्णन (लेखक) के शोध पत्र [5, 11] में किया गया है।

(ii) **तगुचि विधि का अनुप्रयोग** - प्रायोगिक अभिकल्पन की तगुचि विधि का विकास प्रोफेसर जी. तगुचि द्वारा किया गया था। यह सांख्यिकीय विधि सरल एवं दक्ष है तथा प्रक्रम प्राचलों के प्रायोगिक अभिकल्पन इष्टतमीकरण के लिए एक सुव्यवस्थित प्रक्रिया बतलाती है। अभियांत्रिकीय विश्लेषण में निकाय के प्राचलों के अभिकल्पन के लिए तगुचि विधि एक शक्तिशाली माध्यम उपलब्ध कराती है। तगुचि विधि में निम्न चरण होते हैं। [12-15]:

(i) प्रतिसाद चर (Response Variable) या उद्देश्य (Objective) या आउटपुट गुणवत्ता अभिलक्षण (Output quality characteristics) जिसका इष्टतमीकरण किया जाना हो, को चिन्हित/ चयनित करना। वर्तमान अध्ययन में यह संयंत्र एक्सर्जी दक्षता है।

(ii) नियंत्रण कारकों (Control factors) या प्रक्रम प्राचलों (Process parameters) (वर्तमान अध्ययन में, संघनित्र दाब, मुख्य भाप तापमान एवं पुनस्तापन तापमान) की पहचान करना जो कि प्रतिसाद चर या उद्देश्य को प्रभावित कर सकते हों।

(iii) नियंत्रण कारकों के स्तरों तथा उनकी संभावित इन्टरएक्शन (Interactions) का निर्धारण करना

(iv) आर्थोगोनल श्रृंखला समूह (OA) का चुनाव करना तथा OA के ट्रायलों (Trails) में वर्णन अनुसार परीक्षण संचालित करना।

(v) सिग्नल–टू–नाइस (S/N) अनुपात एवं एनालिसिस ऑफ वेरिएन्स (ANOVA) विधियों का उपयोग कर प्रयोगों के परिणामों का विश्लेषण करना।

(vi) इष्टतम अभिकल्पन प्राचलों का समूह ज्ञात करना।

(vii) परिणाम अर्थात् इष्टतम अभिकल्पन प्राचलों का सत्यापन करना।

विश्लेषण में उपयोग किए गए नियंत्रण कारकों को उनके स्तरों के साथ सारणी 1 में तथा L_9 आर्थोगोनल श्रृंखला समूह का उपयोग कर प्रचालन कारकों के लिए तैयार किए गए अभिकल्पन विन्यास (Design layout) को सारणी 2 में बतलाया गया है।

सारणी 1 : प्रचालन कारकों को स्तर का आवंटन

Symbol	Parameters	Levels		
		1	2	3
CP	Condenser Pressure (bar)	0.08	0.10	0.12
MST	Main Steam Temperature (°C)	517	537	557
RHT	Reheat Temperature (°C)	545	565	585

सारणी 2 : L_9 आर्थोगोनल श्रृंखला समूह के लिए नियंत्रण कारकों का प्रयोगिक सेट–अप

Trial No.	MSP	CP	RHT
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	3	3
4	2	1	2
5	2	2	3
6	2	3	1
7	3	1	3
8	3	2	1
9	3	3	2

(iii) **सिग्नल–टू–नॉइस** (S/N) **अनुपात विश्लेषण** - सिग्नल–टू–नॉइस अर्थात् S/N वांछित आउटपुट का लॉग फलन (Log Functions) होते हैं तथा गुणवत्ता अभिलक्षण में उपस्थित विचरण/विविधता (Variation) को दर्शाते हैं। प्राय: उपयोग किए जाने वाले अन्य मानक विधियों के विपरीत, तगुचि विधि में परीक्षण परिणामों के मानक विचलन तथा माध्य दोनों पर विचार कर इष्टतम अवस्था ज्ञात की जाती है। S/N अनुपात सामान्यत: तीन स्वरूपों में होते हैं दी–लोवर–द–बेटर (Lower-the-better, LB) दी हाइअर–द–बेटर (Higher-the-better, HB) एवं दी नॉमिनल–द–बेटर (Nominal-the-better, NB). चूँकि शक्ति संयंत्र में इष्टतम प्रचालन अवस्था में अधिकतम एक्सर्जी दक्षता वांछनीय होती है, इसलिए वर्तमान अध्ययन में एक्सर्जी दक्षता की HB गुणवत्ता अभिलक्षण का चयन किया जाता है। इसका आशय यह है कि प्रक्रम प्राचल का इष्टतम स्तर वह होता है जिस पर S/N अनुपात अधिकतम होता है [12, 13].

HB गुणवत्ता अभिलक्षणों को निम्नानुसार व्यक्त किया जा सकता है:

$$\eta\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}\right) = -10\log_{10}\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{y_i^2}\right)$$

जहाँ η(S/N) हाइअर–द–बेटर अवस्था के लिए S/N अनुपात एवं y_i तगुचि प्रयोग में अभिकल्पित प्राचलों के विभिन्न समूहों के साथ सायकल टेम्पो अनुरूपण निदर्श द्वारा ज्ञात की गई वास्तविक एक्सर्जी दक्षता (η_{II}) को दर्शाता है तथा n परीक्षण (Trial) में दोहराव (Repetitions) की संख्या है [12, 13]. एक्सर्जी दक्षताओं [16] के गणना परिणाम तथा संगत S/N अनुपातों को सारणी 3 में दिखाया गया है।

सारणी 3: शक्ति संयत्र में विभिन्न प्रचालन अवस्थाओं के लिए एक्सर्जी परिणाम एवं S/N अनुपात

Trial	CP	MST	RHT	η_{II} (%)	S/N ratio(dB)
1	0.08	517	545	40.087	32.06007
2	0.08	537	565	40.551	32.16003
3	0.08	557	585	40.987	32.25292
4	0.10	517	565	39.454	31.92182
5	0.10	537	585	39.915	32.02272
6	0.10	557	545	39.895	32.01837
7	0.12	517	585	38.911	31.80145
8	0.12	537	545	38.904	31.79989
9	0.12	557	565	39.336	31.89580

(iv) **एनालिसिस ऑफ वेरिएन्स** (ANOVA) [5] - तगुचि विधि अपने आप में एक–एक प्राचल का सम्पूर्ण निकाय पर प्रभाव ज्ञात नहीं कर सकता, परंतु एनोवा (ANOVA) के द्वारा यह संभव है। एनोवा एक सांख्यिकीय विधि है [17] जिसका उपयोग प्रतिसादी चर (Response variable) या उद्देश्य (Objective) पर विभिन्न नियंत्रण कारकों के प्रभाव की सीमा ज्ञात करने के लिए किया जाता है। एनोवा का अनुप्रयोग यह परीक्षण करने में किया जाता है कि गुणवत्ता अभिलक्षण को कौन से अभिकल्पन प्राचल पर्याप्त रूप से प्रभावित करते हैं [12, 13]. यह विश्लेषण 5% विश्वसनीयता स्तर (Confidence level) पर किया जाता है।

ANOVA गणना के लिए MINITAB सॉफ्टवेयर का उपयोग किया गया है और परिणामों को सारणी 4 में दर्शाया गया है। परिणामों से स्पष्ट है कि संघनित्र दाब सर्वाधिक प्रभावकारी प्राचल है जिसका प्रभाव डालने में प्रतिशत योगदान 83.43% है एवं इसके पश्चात् 12.99% के साथ मुख्य भाप तापमान की बारी आती है।

सारणी 4: एक्सर्जी दक्षता के लिए ANOVA के परिणाम

Source	DoF	Adj SS	Adj MS	F-Value	P-Value	% contribution
CP	2	3.33953	1.66976	54252.9	0.000	83.43%
MST	2	0.52006	0.26003	8448.71	0.000	12.99%
RHT	2	0.14324	0.07162	2326.96	0.000	3.58%
Error	2	0.00006	0.00003			0.00%
Total	8	4.00289				

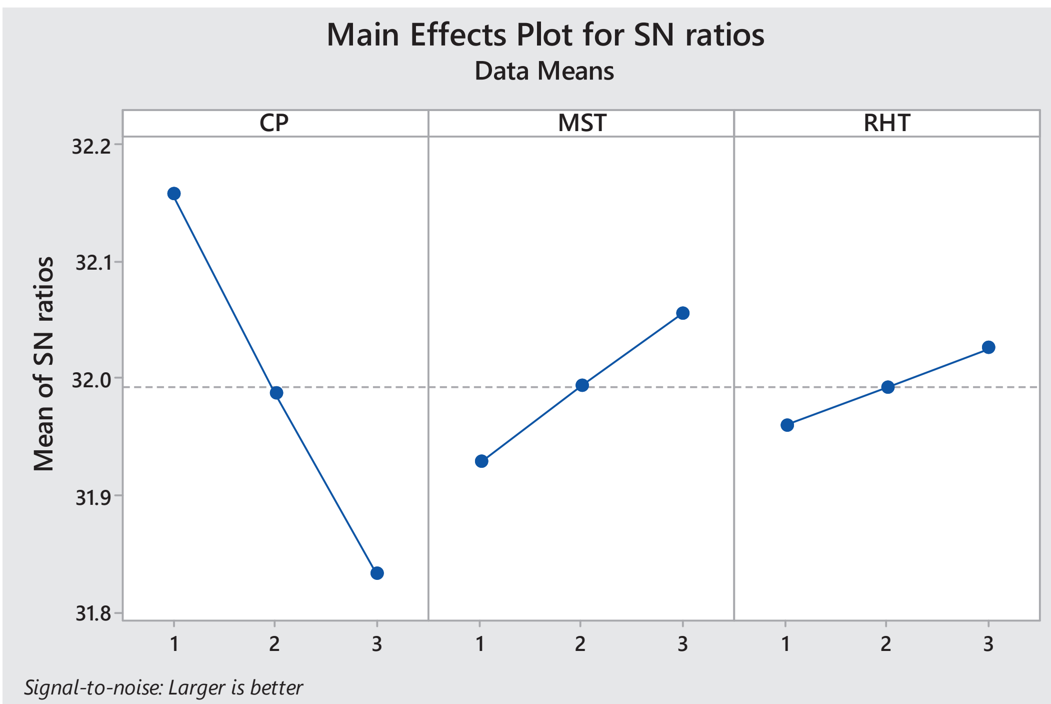
(v) **कारकों का इष्टतम स्तर ज्ञात करना** [5] - CP, MST एवं RHT के लिए माध्य प्रतिसाद (रिस्पांस) एवं माध्य S/N अनुपात चित्र 1 में दिखाए अनुसार हैं। प्राचल स्तरों के संगत इष्टतम अवस्थाओं को चित्र 1 में शीर्ष बिन्दुओं के रूप में दर्शाया गया है। S/N अनुपात पर आधारित मानों को सारणी 5 में दिया गया है। इसके अतिरिक्त, सारणी 6 में दर्शाए अनुसार एक्सर्जी दक्षता के लिए उच्चतम प्रतिसाद एवं उच्चतम S/N अनुपात हेतु प्राचलों का संयोजित इष्टतम स्तर A1B3C3 के रूप में ज्ञात किया गया। दूसरे शब्दों में, शक्ति संयंत्र में सर्वश्रेष्ठ एक्सर्जी दक्षताओं तथा निकाय निष्पादन हेतु इष्टतम प्रचालन

अवस्थाएँ हैं : संघनित्र दाब स्तर 1 पर, मुख्य भाप तापमान स्तर 3 पर एवं पुनस्तापन भाप तापमान स्तर 3 पर होना चाहिए।

(vi) **पुष्टिकारक परीक्षण** [5] - प्रक्रम प्राचलों का इष्टतम स्तर निर्धारित करने के पश्चात् इनका उपयोग कर निष्पादन में सुधार को प्रतिसादी चर (Response variable) के पदों में भविष्यवाणी करना और इसकी पुष्टि करना प्रक्रिया का अंतिम चरण है। भविष्यवाणी की जाने वाली S/N अनुपात की गणना [18] में बतलाई विधि से की जा सकती है।

$$\eta_{predicted} = \eta_m + \sum_{i=1}^{o} (\eta_i - \eta_m)$$

जहाँ η_m, S/N अनुपात का कुल माध्य, η_i, इष्टतम स्तर पर माध्य S/N अनुपात, o, विचाराधीन प्राचलों की संख्या हैं । S/N अनुपात में सुधार को सारणी 6 में बतलाया गया है।



चित्र 1: माध्य S/N अनुपात विरुध्द प्रक्रम प्राचल

सारणी 5 : माध्य S/N अनुपात के लिए प्रतिसाद सारणी

Level	CP	MST	RHT	Overall Mean S/N Ratio
1	32.16	31.93	31.96	31.9933
2	31.99	31.99	31.99	
3	31.83	32.06	32.03	
Delta	0.33	0.13	0.07	
Rank	1	2	3	

सारणी 6 : एक्सर्जी दक्षता के लिए पुष्टिकारक परीक्षण का परिणाम

Levels	Starting process parameters	Optimal process parameters	
		Prediction	Actual
	A2B2C3	A1B3C3	A1B3C3
Exergy efficiency, %	39.915	41.036	40.987
S/N ratio	32.02272	32.2634	32.2529
Improvement of S/N ratio	0.2302		
Prediction error	0.010		

(vii) **सम्पूर्ण विश्लेषण के विधिमान्यता की जाँच करना** [5] –

(i) सारणी 6 से स्पष्ट है कि प्रतिसादी चर अर्थात् एक्सर्जी दक्षता पर उच्च F- मान का (प्रतिशत हिस्सेदारी के पदों में) सर्वाधिक प्रभाव होता है। इस तरह विश्लेषण और नियंत्रण का. रकों का प्रभाव में हिस्सेदारी की पुष्टि परीक्षण के द्वारा होती है।

(ii) 'परिकल्पना' परीक्षण:

शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis, H_0) - प्रतिसादी कारक पर प्रभाव के संदर्भ में नियंत्रण कारक अधिक औचित्यपूर्ण महत्वपूर्ण नहीं हैं ।

वैकल्पिक परिकल्पना (Alternate Hypothesis, H_A) - प्रतिसादी कारक पर प्रभाव के संदर्भ में नियंत्रण कारक औचित्यपूर्ण/महत्वपूर्ण हैं ।

नल परिकल्पना को स्वीकृत अथवा अस्वीकृत करने के लिए निर्णय करने हेतु संबंधित नियम हैं:

विश्वसनीयता के α स्तर पर, H_0 को अस्वीकृत करें यदि $P > \alpha$ एवं अस्वीकृत ना करें यदि $P < \alpha$.

जहाँ 95% विश्वसनीयता स्तर के लिए, $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

वर्तमान कार्य में, सारणी 4 से यह देखा गया कि सभी तीनों प्राचलों का P-मान 0.05 से कम है अर्थात् एक्सर्जी दक्षता के संबंध में ये कारक बहुत ही औचित्यपूर्ण/प्रभावशील हैं परंतु इनके प्रभावों की सीमा अलग–अलग है।

संभावित अनुप्रयोग

अधिकांश आधुनिक कोयला दाहित शक्ति संयंत्रों की प्रकृति अतिक्रांतिक प्रकार की है। इससे स्पष्ट है कि इस शोध कार्य में प्रयोग की गई विधि का अनुप्रयोग ऐसे सभी आधुनिक शक्ति संयंत्रों में किया जा सकता है। अध्ययन के परिणामों के अनुसार प्रभावकारी प्रचालन कारकों को उनके महत्व के क्रम के अनुरूप वरीयता प्रदान करते हुए और उनके मानों के नियंत्रण को प्राथमिकता देते हुए संयंत्रों की दक्षता में वृद्धि की जा सकती है।

निष्कर्ष एवं भविष्य के शोध निर्देश

वर्तमान शोध अध्ययन में :

- प्रतिसादी कारक (यहाँ पर एक्सर्जी दक्षता) पर एक अतिक्रांतिक तापीय शक्ति संयंत्र के नियंत्रण कारकों के अलग–अलग प्रभाव का अध्ययन तगुचि, S/N अनुपात एवं ANOVA का उपयोग करके किया गया। संयंत्र एक्सर्जी दक्षता पर 83.43% की प्रतिशत हिस्सेदारी के साथ संघनित्र दाब सर्वाधिक प्रभावकारी कारक है और इसके बाद 12.99% हिस्सेदारी के साथ मुख्य भाप तापमान का क्रम आता है।
- तापीय शक्ति संयंत्र के सबसे अच्छे एक्सर्जी दक्षता के लिए नियंत्रण चरों के स्तरों के संदर्भ में इष्टतम प्रचालन अवस्थाओं को चिन्हित किया

गया। उदाहरण के लिए, वर्तमान विश्लेषण में संघनित्र दाब स्तर 1 पर, मुख्य भाप तापमान स्तर 3 पर एवं पुनर्तापित भाप तापमान स्तर 3 पर पाया गया।

ANOVA गणनाएँ 95% विश्वसनीयता स्तर के साथ की गई तथा पुष्टिकारक परीक्षण द्वारा चयनित प्रक्रम प्राचलों के इष्टतम स्तर का सत्यापन किया गया और अंतत: सम्पूर्ण विश्लेषण एवं परिणामों की विधिमान्यता का सत्यापन F-सांख्यिकीय मान तथा परिकल्पना परीक्षण के द्वारा किया गया।

भविष्य के शोध निर्देश – वर्तमान शोध अध्ययन में संयंत्र की एक्सर्जी दक्षता पर केवल तीन प्रचालन कारकों के प्रभावों की सीमा का आकलन किया गया है । अत: अन्य वातावरणीय एवं प्रचालन कारकों के प्रभावों का अध्ययन भविष्य के शोध कार्यों में किया जा सकता है ।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी तकनीकी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिन्दी शब्दावली
Cycle Tempo	सायकल टेम्पो
Efficiency	दक्षता
Exergy	एक्सर्जी
Modeling	निदर्शन
MW	मेगावाट
Optimum	इष्टतम
Parameters	प्राचल
Regeneration	पुनर्जनन
Reheating	पुनस्तापन
Simulation	अनुरूपण
Supercritical	अतिक्रांतिक
Validation	विधिमान्यकरण

संदर्भ

1. Ravindra Kumar, P. Raju, V. Ramachandra, N. Ravi Kumar, “Simulation and parametric optimisation of thermal power plant cycles”, Science Direct, Perspectives in Science, 2016, 8, pp. 304-306.
2. Ravinder Kumar, R. Jilte, M. H. Ahmadi and R. Kaushal, “A simulation model for thermal performance prediction of a coal-fired power plant”, International Journal of Low-Carbon Technologies, 2019, 14, pp. 122–134.
3. S. Chandrasekharan, R. C. Panda, B. N. Swaminathan, “Statistical modeling of an integrated boiler for coal fired thermal power plant”, Heliyon, Elsevier, 2018, pp. 1-15.
4. Du Zenghui, “Design and study of water supply system for supercritical unit boiler in thermal power station”, AIP Conference Proceedings, 2018, pp.1-5.
5. S. S. L. Patel, A. K. Shukla and G. K. Agrawal, “Thermodynamic Modeling and Optimization of a Coal Fired Thermal Power Plant using Cycle Tempo, Taguchi and ANOVA”, International Journal of Basic and Applied Research, 2019, 9(3), pp. 152-161.
6. S. Mitra and S. Sarkar, “Exergy Efficiency and Application of Taguchi and ANOVA Methodology for a Thermal Power Plant”, International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering, 2015, 5(5), pp. 424- 430.
7. E. Baysal, A. K. Bilginsoy and A. Acir, “Parametric optimization on exergy analysis of a thermal power plant using Taguchi design method”, Energy Education Science and Technology, PartA: Energy Science and Research, 2012, 29(2), pp. 1313-1326.
8. S. Mitra and S. Sarkar, “Application of Exergy and Taguchi Methodology for a Power Plant under Varying Operating Conditions”, International Journal of Engineering Research and Applications, 2015, 5(6)(Part -1), pp. 25-31.

9. M. Jamil, V. Popov, S. Ahmed, and Z. A. Khan, "Management of electricity generation using the Taguchi approach", Energy and Sustainability WIT Transactions on Ecology and the Environment, WIT Press, 2007, 105, pp. 13-23.
10. Wang Meng-Hui, Huang Mei-Ling, Zhan Zi-Yi and Huang Chong-Jie, "Application of the Extension Taguchi Method to Optimal Capability Planning of a Stand-alone Power System", Energies. 2016, 9(174), pp. 1-17.
11. S. S. L. Patel and P. Patel, "Simulation and Investigation of Performance of a Coal Fired Thermal Power Plant with Additional Feed Water Heaters", Vigyan Prakash. Jan-March 2022, Vol.20 No.1, pp. 19-28.
12. G. Taguchi, E. A. El Sayed, T. Hsiang, "Quality Engineering in Production Systems", McGraw-Hill. New York, ISBN: 0070628300, 1989.
13. P. J. Ross, "Taguchi techniques for quality engineering: loss function, orthogonal experiments, parameter and tolerance design", 2nd ed., Mc Graw-Hill, New York, ISBN: 0- 07-053866-2, 1996.
14. S. Shaji and V. Radhakrishnan, "Analysis of process parameters in surface grinding with graphite as lubricant based on the Taguchi method", J Mater Process Technology. 2003, pp. 51–59.
15. J. Z. Zhang, J. C. Chen, E. D. Kirby, "Surface roughness optimization in an end-milling operation using the Taguchi design method", J Mater Process Technology, 2007, 184, pp. 233-239.
16. Cycle-Tempo release 5.0. Delft University of Technology, www.cycle-tempo.nl. 2006.
17. C. R. Kothari, "Research Methodology: Methods and Techniques", 3rd edition, New Age International Pvt. Ltd. Publishers, 2014.
18. W. H. Yang and Y. S. Tang, "Design optimization of cutting parameters for turning operations based on the Taguchi method", Journal of Materials Processing Technology, 1988, pp. 122-129.

आवेश के प्रेरण व चर घनत्व द्वारा गोलाकार रूप से सममित पिंड के गुरुत्वीय निपात की रोकथाम

Halting of Gravitational Collapse for a Spherically Symmetric Object by Induction of Charge and Variable Density

अनिल माहेश्वरी[1] एवं एम. के. गोखरू[2]
Anil Maheshwari[1] and M. K. Gokhroo[2]
[1]Engineering College Ajmer-305001, INDIA
[2]Retired Principal, Government College Ahore-307029, INDIA
[1]anil.knowledge@gmail.com, [2]drgokhroomk@gmail.com
https://doie.org/10.0121/VP.2025129594

सारांश

गोलाकार रूप से सममित, आवेशित व चर घनत्व वाले पूर्ण द्रव हेतु आइंस्टीन–मैक्सवेल समीकरणों का एक आंतरिक हल यहाँ प्रस्तुत किया गया है। t = स्थिरांक लेने पर इस हल का भौतिक 3 – स्थान गोलाकार है। गुरुत्वीय निपात के मानक ओपेनहाइमर – स्नाइडर निदर्श व गुरुत्वीय निपात की रोकथाम के संदर्भ में दिये गए माहेश्वरी – गोखरू निदर्श, दोनों का सामान्यीकरण प्राप्त करने हेतु एक सन्निकटन प्रक्रिया का उपयोग किया गया है जो दर्शाती है कि बड़े एवं साथ ही छोटे आवेशित पिंडों में अचर घनत्व के स्थान पर चर घनत्व मानने पर इनके गुरुत्वीय निपात की अधिक प्रभावी रोकथाम की जा सकती है।

Abstract

An interior solution for spherically symmetric perfect fluid with charge and variable density of Einstein - Maxwell equations is presented here. Considering t = constant, the physical 3 - space of this solution is spheroidal. An approximation procedure is used to get a generalization of the standard Oppenheimer - Snyder model of collapse and Maheshwari - Gokhroo model of halting of collapse, which represents that collapse of large as well as small objects with charge can be halted more efficiently by considering variable density instead of constant density.

मुख्य शब्द : गुरुत्वीय निपात, आवेश, चर घनत्व, दबाव, द्रव्यमान।

Keywords : Gravitational Collapse, Charge, Variable Density, Pressure, Mass.

परिचय

ब्रहमांड विज्ञान की सबसे महत्वपूर्ण समस्याओं में से एक के रूप में, गुरुत्वीय निपात के कई रोचक खगोलभौतिकी अनुप्रयोग है, जिनमें सामान्य सापेक्षता एक सार्थक भूमिका निभाती है। गुरुत्वीय निपात की समस्या में तारे की सतह सम्पूर्ण दिक् एवं काल को दो भिन्न – भिन्न क्षेत्रों में विभाजित करती है। उचित दृष्टि के साथ कई तारों के अस्तित्व के तथ्य के रूप में, गुरुत्वीय निपात को रोकने की संभावना के बारे में जानना हमेशा महत्वपूर्ण होता है।

ओपेनहाइमर और स्नाइडर [1] ने स्थिर श्वार्जस्चाइल्ड बाह्य भाग के साथ धूल के गोलीय पिंड के गुरुत्वीय निपात के बारे में प्रारम्भिक चर्चा की। उसके बाद गुरुत्वीय निपात व उसके रोकथाम के अध्ययन पर काफी ध्यान दिया गया। मिसनर [2] ने सरलीकृत ताप स्थानांतरण प्रक्रिया को दर्शाते हुए गोलाकार

गुरुत्वीय निपात के मूलभूत समीकरण प्राप्त किए। कुचर [3] ने गुरुत्वीय निपात को आवेश के साथ सहसंबंध किया है। ओकांनेल [4] ने क्वांटम गुरूत्वाकर्षण बलों द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है। माहेश्वरी और गोखरू [5], [6], [7], [8], [9] ने दबाव घनत्व जनित भिन्न–भिन्न परिस्थितियों में विभिन्न दूरिक से संबंधित गुरुत्वीय निपात, विचित्रताओं एवं कृष्ण छिद्र का विस्तृत अध्ययन किया है। माहेश्वरी और गोखरू [10] ने अचर घनत्व के साथ आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है।

वर्तमान शोध पत्र में पूर्ण द्रव, आवेश और चर घनत्व से भरे हुए बड़े व साथ ही छोटे गोलाकार सममित पिंडों के गुरुत्वीय निपात को रोकने की संभावनाओं पर चर्चा की गई है। यहाँ घनत्व की भिन्नता को यादृच्छिक रूप से $\rho = \rho_C \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ लिया गया है, जहाँ गोलाकार पिंड के केंद्र पर घनत्व है और उसके बाद जैसे – जैसे हम गोलाकार पिंड की सीमा की ओर बढते हैं, घनत्व कम होता जाता है।

आंतरिक दिक् एवं काल

वैद्या और टिकेकर [11] ने दर्शाया है कि दूरीक

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - \left(\frac{1 - kr^2/R^2}{1 - r^2/R^2}\right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2) \quad \text{..... (1)}$$

लगभग 3.5 M☉ के कुल द्रव्यमान के साथ एक अति सघन तारे के आन्तरिक भाग का प्रतिनिधित्व कर सकती है।

यदि द्रव्यमान इससे अधिक होता है, तो संतुलन संभव नहीं होने की वजह से गुरुत्वीय निपात होने की प्रबल सम्भावना होगी।

उपरोक्त दूरीक (1) में कुछ परिवर्तन करने पर वैद्य और पटेल [12] ने दूरीक

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\left(\frac{1 - kr^2}{1 - r^2}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\phi^2)\right] \quad \text{..... (2)}$$

प्राप्त की, जो गोलाकार रूप से सममित दिक् एवं काल को दर्शाता है जिसमें $k = 1 - \frac{b^2}{R^2}$ एक अचर है, जहाँ b और R गोलाकार 3–स्पेस $dt=0$ के समीकरण $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{R^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1$ में t के फलन हैं।

उपरोक्त दूरीक (2) ओपेनहाइमर – स्नाइडर दूरीक का एक स्पष्ट सामान्यीकरण है।

क्षेत्र समीकरणों का समाधान

निर्देशांक $x^1 = r, \; x^2 = \theta, \; x^3 = \varphi, \; x^4 = t$ को मानकर, आइन्स्टीन – मैक्सवेल समीकरणों $R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R = G^i_j = -8\pi T^i_j$ को दूरीक (2) के लिए निम्न प्रकार हल किया गया है:

$$G_1^1 = -\frac{1-k}{R^2(1-kr^2)} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_1^1, \quad ..... (3)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1-k}{R^2(1-kr^2)^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 \quad ..... (4)$$

व

$$G_4^4 = -\frac{2(1-k)}{R^2(1-kr^2)^2} - \frac{1-k}{R^2(1-kr^2)} - 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_4^4, \quad ..... (5)$$

जहाँ एक उपरी बिंदु अर्थात '.' का चिन्ह 't' के सापेक्ष अवकलन को इंगित करता है।

हम मानते हैं कि अन्तरिक्ष समय की भौतिक सामग्री पूर्ण द्रव और आवेश का मिश्रण है। ऐसे वितरण हेतु T_j^i निम्न प्रकार दिया गया हैः

$$T_j^i = M_j^i + E_j^i, \quad ..... (6)$$

जहाँ M_j^i निम्न प्रकार परिभाषित हैंः

$$M_j^i = (p+\rho)v^i v_j - p\delta_j^i, \quad ..... (7)$$

जिसमें

$$v^i v_j = \begin{cases} 1\ ;\ i=j=4 \\ 0\ ;\ i,j \neq 4 \end{cases} \quad ..... (8)$$

लिया गया है।

अतः $$M_1^1 = M_2^2 = M_3^3 = -p, M_4^4 = \rho = \rho_C\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad ..... (9)$$

तथा E_j^i निम्न प्रकार परिभाषित हैंः

$$E_j^i = -F_{jk}F^{ik} + \frac{1}{4}\delta_j^i F_{UV}F^{UV} \quad ..... (10)$$

गोलाकार सममितता के कारण क्षेत्र प्रदिश F^{ij} के अलुप्त घटकों के रूप में सिर्फ $F^{14} = -F^{14}$ हैं। यह दर्शाता है कि E_j^i के अशून्य घटक निम्न प्रकार हैंः

$$E_1^1 = E_4^4 = -E_2^2 = -E_3^3 = -\frac{1}{2}g^{11}g^{44}(F_{14})^2, \quad ..... (11)$$

जहाँ टोलमन [13] द्वारा निम्न प्रकार दिया गया हैः

$$\frac{d}{dr}\left[-g^{11}g^{44}F_{14}(-g)^{1/2}\right] = J^4(-g)^{1/2}, \quad ..... (12)$$

जिसमें $J^4 = \frac{\sigma}{R}\sqrt{\frac{1-r^2}{1-k^2}}$ ..... (13)
लिया गया है।

J^4 का मान समीकरण (12) में प्रतिस्थापित करने पर F_{14} का निम्न मान प्राप्त होता है:

$$F_{14} = \frac{\sigma rR}{3}\sqrt{\frac{1-kr^2}{1-r^2}} \qquad ..... (14)$$

अतः समीकरण (11) से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है:

$$E_1^1 = E_4^4 = -E_2^2 = -E_3^3 = \frac{\sigma^2 r^2}{18}, \qquad ..... (15)$$

जहाँ σ आवेश का घनत्व है।

समीकरणों (6), (9) व (15) के संयोजन से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$T_1^1 = -p + \frac{\sigma^2 r^2}{18}, T_2^2 = T_3^3 = -p - \frac{\sigma^2 r^2}{18}, T_4^4 = \rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{\sigma^2 r^2}{18} \qquad ..... (16)$$

समीकरण (16) को समीकरणों (3), (4) व (5) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$G_1^1 = 8\pi\, p - \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9}, \qquad ..... (17)$$

$$G_2^2 = G_3^3 = 8\pi\, p + \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9} \qquad ..... (18)$$

व $$G_4^4 = -8\pi\,\rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9} \qquad ..... (19)$$

साथ ही, समीकरण (16) से हमें $T_1^1 - T_2^2 = \frac{\sigma^2 r^2}{9} > 0$ प्राप्त होता है अर्थात् $G_2^2 - G_1^1 > 0$

इस प्रकार, समीकरणों (3) व (4) का उपयोग करके $-k(1-k) > 0$ प्राप्त होता है, जो तभी संभव है, जब $k < 0$ अथवा $k > 1$ हो।

परन्तु, $k = 1 - \frac{b^2}{R^2}$ के फलस्वरूप K>1 संभव नहीं है। अतः उपरोक्त से K<0 प्राप्त होता है।

समीकरणों (3), (4) व (5) को समीकरणों (17), (18) व (19) के साथ संयोजित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$8\pi\, p = -\frac{(1-k)(2-kr^2)}{2R^2(1-kr^2)^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2}, \qquad ..... (20)$$

$$8\pi \rho_C \left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{(1-k)(6-kr^2)}{2R^2(1-kr^2)^2}+3\frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad ..... (21)$$

व $$8\pi \sigma^2 = -\frac{9k(1-k)}{R^2(1-kr^2)^2} \quad ..... (22)$$

$k < 0$ के लिए, समीकरणों (21) व (22) से हमें $\rho_C > 0$ व $\sigma^2 > 0$ प्राप्त होता है।

साथ ही, समीकरण (20) से यह देखा जा सकता है कि

$$8\pi\, p' = \frac{k(k-1)r(3-2kr^2)}{R^2(1-kr^2)^3} > 0 \text{, जब } k < 0 \quad ..... (23)$$

अर्थात दाब p मूल बिंदु से सीमा तक बढता है।

यहाँ व इसके पश्चात् ' ' ' का चिन्ह ' r ' के सापेक्ष अवकलन को इंगित करता है।

साथ ही, $r = 0$ यदि हो, तो $8\pi\, p' = 0$, अर्थात केंद्र पर दाब अचर तथा न्यूनतम है व केंद्र से दूर जाने पर यह बढता जाता है। अतः इस परिदृश्य में गुरुत्वीय निपात की परिकल्पना नहीं की जा सकती है।

समीकरण (22) $k = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर $\sigma = 0$ प्राप्त होता है व उपरोक्त हल ओपेनहाइमर – स्नाइडर हल में परिवर्तित हो जाता है।

साथ ही, समीकरणों (20), (21) व (22) में $\boldsymbol{R}$ को अचर लेने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$\frac{\sigma}{p} = \frac{6\sqrt{8\pi}R(1-kr^2)}{(2-kr^2)}\sqrt{\frac{k}{k-1}},$$ जिसका अस्तित्व $k \in (-\infty, 0)$ लेने पर है ..... (24)

व $$\sigma + \rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{3\sqrt{k(k-1)}}{\sqrt{8\pi}R(1-kr^2)} + \frac{(1-k)(6-kr^2)}{16\pi R^2(1-kr^2)^2} \quad ..... (25)$$

समीकरण (24) में $R >> r$ लेने पर हमें $\sigma >> p$ के रूप में एक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि जैसे – जैसे पिंड बड़ा होता जा रहा है, दाब को रोकने हेतु आवेश की शक्ति भी तेजी से बढ रही है। अतः आवेश का विद्यमान होना बड़े पिंडों के गुरुत्वीय निपात को रोकने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। परन्तु, छोटे पिंडों हेतु यही कथन निश्चितता के साथ नहीं कहा जा सकता। इसलिए, विशेष रूप से छोटे पिंडों हेतु चर घनत्व की भूमिका जानना बहुत महत्वपूर्ण हो जाता है।

साथ ही, समीकरण (24) में , $r = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $\frac{\sigma}{p} > 0$ प्राप्त होता है। अर्थात केंद्र पर दाब धनात्मक है।

समीकरणों (21), (24) व (25) में , $R = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$8\pi \rho_C \left(1-r^2\right) = \frac{(1-k)(6-kr^2)}{2(1-kr^2)^2}, \quad \text{..... (26)}$$

$$\frac{\sigma}{p} = \frac{6\sqrt{8\pi}(1-kr^2)}{(2-kr^2)}\sqrt{\frac{k}{k-1}} \quad \text{..... (27)}$$

व

$$\sigma + \rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) = \frac{3\sqrt{k(k-1)}}{\sqrt{8\pi}(1-kr^2)} + \frac{(1-k)(6-kr^2)}{16\pi(1-kr^2)^2} \quad \text{..... (28)}$$

अब, गोलाकार पिंड के केंद्र अर्थात $r = 0$ पर समीकरण (26) द्वारा $k = 1 - 8.373\rho_C$ प्राप्त होता है, जिसे $k < 0$ के साथ हल करने पर निम्न महत्वपूर्ण असमिका प्राप्त होती है:

$$\rho_C > 0.119 \quad \text{..... (29)}$$

गोलाकार पिंड की सीमा पर अर्थात $r = R = 1$ पर, समीकरण (26) द्वारा $k = 6$ प्राप्त होता है, जो $k < 0$ की वजह से संभव नहीं है। अतः यह स्पष्ट है कि चर घनत्व, जो गोलाकार पिंड के केंद्र से सीमा तक जाने पर लगातार घट रहा है, पूर्ण रूप से शून्य नहीं होगा।

साथ ही, समीकरण (21) $k = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें $r = 0.29R$ प्राप्त होता है। अतः $k < 0$ के साथ – साथ असमिका (29) को ध्यान में रखते हुए निम्न असमिका को अधिरोपित करना आवश्यक है:

$$r < 0.29R \quad \text{..... (30)}$$

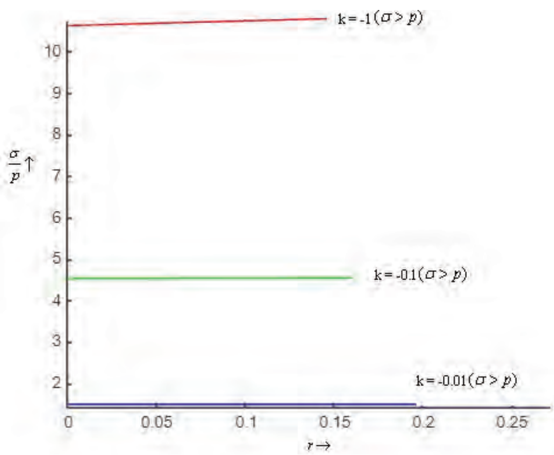
अब, हम k के विभिन्न ऋणात्मक मान, जो कि $k = 0$ के बहुत नजदीक अथवा दूर हैं के साथ – साथ $0 \le r \le \frac{R}{4}; R = 1$ की अलग – अलग स्थितियों पर विचार करते हैं:

स्थिति – 1: समीकरणों (27) व (28) में $k = -1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $10.6321 \le \frac{\sigma}{p} \le 10.9542$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0661$M_\odot$

स्थिति – 2: समीकरणों (27) व (28) में $k = -0.01$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $4.5335 \le \frac{\sigma}{p} \le 4.5476$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0214 $M_\odot$

स्थिति – 3: समीकरणों (27) व (28) में $k = -0.01$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $1.4962 \le \frac{\sigma}{p} \le 1.4966$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0118 $M_\odot$

उपरोक्त तीनों स्थितियों को नीचे लेखाचित्र द्वारा दर्शाया गया है।



शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Gravitational Collapse	गुरुत्वीय निपात
Charge	आवेश
Variable Density	चर घनत्व
Pressure	दाब
Mass	द्रव्यमान
Induction	प्रेरण
Space - Time	दिक् – काल
Field Equation	क्षेत्र समीकरण

निष्कर्ष

उपरोक्त विश्लेषण में, बड़े व साथ ही छोटे आवेशित पिंडों के गुरुत्वीय निपात की रोकथाम को प्रदर्शित करने वाले एक निदर्श का अध्ययन किया गया है। समीकरणों (27), (28) व उन पर आधारित तीन स्थितियों का आकलन करने पर यह स्पष्ट है कि K के विभिन्न ऋणात्मक मानों के लिए, विभिन्न द्रव्यमान वाले पिंड आवेश द्वारा दाब को रोकने की वजह से स्थिर हैं। माहेश्वरी और गोखरू [10] ने अधिक द्रव्यमान वाले पिंडों के लिए अचर घनत्व के साथ आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है, जबकि वर्तमान अध्ययन में अचर घनत्व के स्थान पर चर घनत्व लेने पर उपरोक्त तीनों स्थितियों में प्राप्त द्वारा σ>P यह दर्शाया गया है कि कम द्रव्यमान वाले पिंडों में भी आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात की रोकथाम संभव है।

संदर्भ

[1] J R Oppenheimer and H Snyder, (1939): Phys. Rev. 56, 455
[2] C W Misner, (1965): Phys. Rev. B137, 1360
[3] K Kuchar, (1968): Czech. J. Phys. B18, 435
[4] R F O'connell, (1975): GRG 6, 99
[5] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2010): IJMSEA, 4, 11
[6] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2011): Ultra Scientist, 23, 693
[7] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2012): Research Journal of Engineering Sciences, 1, 66
[8] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2012): Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, 12
[9] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2014): International Journal of Physical, Chemical and Mathematical Sciences, 3, 22
[10] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2010): IJMSEA, 4, 415
[11] P C Vaidya and R Tikekar, (1982): J. Astrophys. Astron. 3, 325
[12] P C Vaidya and L K Patel, (1996): Pramana 46, 342
[13] R C Tolman, (1962): Oxford University Press Ltd., Oxford, 264

गुणन – T सहमानक के अंतर्गत प्रति – अस्फुट उपवलय

On Anti-Fuzzy Subring Under Product T- Conorm

संजीत कुमार[1], मनोरंजन कुमार सिंह[2]

Sanjeet Kumar[1], Manoranjan Kumar Singh[2]

[1, 2] Department of Mathematics, Magadh University, Bodh-Gaya, Bihar, India

[1] drsanjeetkumar1994@gmail.com, [2]drmksingh_gaya@yahoo.com

https://doie.org/10.0121/VP.2025540824

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य गुणन – T सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय (Anti – Fuzzy Subring) की अवधारणा से पाठकों को परिचित कराना है । इसके अतिरिक्त, इस शोध पत्र में प्रति – अस्फुट उपवलय की गुणन – T सहमानक सन्दर्भ में दी गयी परिभाषा का विश्लेषण किया गया है तथा समाकारिता के कुछ प्रमेय भी प्रतिपादित किये गए है । अंत में प्रति – अस्फुट उपवलय के गुणन (*) की अवधारणा को प्रतिपादित किया गया है तथा इससे सम्बंधित कुछ प्रमेय भी दिए गए हैं ।

Abstract

The motivation of this work is to make acquainted to the readers with the notion of anti-fuzzy subring of a ring under product T- conorm. Apart from this, analysis of the definition of anti-fuzzy subring with special reference to product of T-conorm has been carried out in this research paper and some theories are derived with a few results on homomorphism. At the end, we have proposed the concept of product (*) of anti-fuzzy subring along with some related theorems.

मुख्य शब्द : अस्फुट उपवलय, प्रति – अस्फुट उपवलय, प्रति – अस्फुट उपवलय का गुणन, प्रति – अस्फुट उपवलय की समाकारिता

Keywords: Fuzzy Subring, Anti-fuzzy Subring, Product of Anti-fuzzy Subring, Homomorphism of Anti-fuzzy Subrings

परिचय

अस्फुट समुच्चय की परिकल्पना सर्वप्रथम जादेह [1] ने की थी । इस परिकल्पना के पश्चात से ही इसका प्रयोग विविध क्षेत्रों में तेजी से बढ. रहा है । समूह सिद्धांत (Group Theory) के क्षेत्र में अस्फुट समुच्चय का प्रयोग सर्वप्रथम रोसेनफेल्ड [2] ने किया तथा साथ ही किसी समूह के अस्फुट उपसमूह की अवधारणा को प्रतिपादित किया । इस कार्य के पश्चात अस्फुट सिद्धांत (Fuzzy Theory) के क्षेत्र में क्रांतिकारी परिवर्तन दृष्टिगत हुए तथा अस्फुटीकरण (Fuzzification) की प्रक्रिया में तेजी आई । कालान्तर में, लियूं [7] ने अस्फुट उपवलय (Fuzzy Subring) तथा अस्फुट गुणजावली (Fuzzy Ideal) की अवधारणा को प्रतिपादित किया । इसके पश्चात, अनेकों शोधकर्ताओं दीक्षित [8], मुखर्जी एवं अन्य [10] तथा सिंह [5] ने अस्फुट उपवलय तथा अस्फुट गुणजावली के कई पहलुओं की विवेचना की । इस शोध पत्र में हमने आजम एवं अन्य [9] द्वारा दी गयी प्रति – अस्फुट उपवलय की अवधारणा को परिष्कृत किया हैं तथा यह प्रदर्शित किया है कि हमारे द्वारा दी गयी अवधारणा आजम द्वारा दी गयी अवधारणा से अधिक आकर्षक है । हमने गुणन T- सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय पर आधारित कुछ प्रमेय भी प्रतिपादित किये हैं ।

परिचयात्मक

परिभाषा 1 [7] माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक अस्फुट उपवलय कहते है यदि P द्विआधारी संक्रिया (+) के लिए अस्फुट उपसमूह (Fuzzy Subgroup) हो तथा P द्विआधारी संक्रिया (.) के लिए अस्फुट उपसमूहाभ (Fuzzy Subgroupoid) हो । अर्थात्,

(i) $P(u + v) \geq min\{P(u), P(v)\}, \ \forall u, v \in R$

(ii) $P(-u) \geq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \geq min\{P(u), P(v)\}, \ \forall u, v \in R$

परिभाषा 2 [9] माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि निम्न शर्तों का पालन होता हो :–

(i) $P(u + v) \leq max\{P(u), P(v)\}, \ \forall u, v \in R$

(ii) $P(-u) \leq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \leq max\{P(u), P(v)\}, \ \forall u, v \in R$

गुणन T- सहमानक के सन्दर्भ में प्रति – अस्फुट उपवलय की अवधारणा

परिभाषा 3 माना कि R दो द्विआधारी संक्रियाओं (+) और (.) के सापेक्ष एक वलय है तथा P, R का एक अस्फुट उपसमुच्चय है तब P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि निम्न शर्तों का पालन होता हो :–

(i) $P(u + v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u, v \in R$

(ii) $P(-u) \leq P(u), \ \forall u \in R$

(iii) $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u, v \in R$

उपरोक्त दोनों परिभाषाओं के सन्दर्भ में हमारा कथन यह है कि यदि P परिभाषा 2 के अर्थ में एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तो परिभाषा 3 के अर्थ में भी एक प्रति – अस्फुट उपवलय है किन्तु इसके विपरीत यह आवश्यक नहीं है ।

माना कि परिभाषा 2 में P, R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब हमारे पास है :–

$$P(u + v) \leq max\{P(u), \ P(v)\} \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u, v \in R$$

$$P(uv) \leq max\{P(u), \ P(v)\} \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v), \ \forall u, v \in R$$

इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि परिभाषा 3 के तहत P, R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय हैं किन्तु सामान्य रूप में $P(u) + P(v) - P(u)P(v) \nleq max\{P(u), P(v)\}$ सदैव सत्य नहीं है । अतः यह निष्कर्ष निकला जा सकता है कि परिभाषा 3, परिभाषा 2 से अधिक व्यापक है ।

उपरोक्त अवधारणा पर आधारित कुछ प्रमेय

प्रमेय 1 माना कि अस्फुट उपसमुच्चय P, वलय (R, + , .) का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब निम्नलिखित कथन सत्य है :–

(i) $P(-u)=P(u),\ \forall\ u\in R$

(ii) $P(0) \leq 2P(u)-[P(u)]^2, \forall\ u \in R$

(iii) $P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v \in R$

प्रमाण : (i) माना कि अस्फुट उपसमुच्चय P, वलय (R, + , .) का एक प्रति – अस्फुट उपवलय है तब हमारे पास है :–

$P(-u) \leq P(u)$

और $P(-(-u)) \leq P(-u)$

i.e., $P(u) \leq P(-u)$

$\therefore P(-u)=P(u),\ \forall\ u \in R$

(ii) $P(u-u)=P(u + (-u))$

$=P(u) + P(-u) - P(u)P(-u)$

$=P(u) + P(u) - P(u)P(u)$

$=2P(u)-[P(u)]^2$

i.e., $P(0) \leq 2P(u)-[P(u)]^2, \forall\ u \in R$

(iii) $P(u-v)=P(u + (-v))$

$\leq P(u) + P(-v) - P(u)P(-v)$

$=P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

i.e., $P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v \in R$

प्रमेय 2– यदि (R, + , .) एक वलय हो तथा P, R का अस्फुट उपसमुच्चय हो, तो P को R का एक प्रति – अस्फुट उपवलय कहते है यदि

$\forall\ u,v\in R, P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$ और $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$ **के साथ** $P(0)=0$

प्रमाण : माना कि (R, + , -) एक वलय है तथा P, R का अस्फुट उपसमुच्चय इस प्रकार से है कि

$P(u-v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v\in R$ .....(i)

और $P(uv) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v),\ \forall\ u,v\in R$ **के साथ** $P(0)=0$

समीकरण (i) से

$P(0-u) \leq P(0) + P(u) - P(0)P(u)$

$=0 + P(u)-0\cdot P(u)$

$=P(u)$

i.e., $P(-u) \leq P(u),\ \forall\ u \in R$

इसके अतिरिक्त $\forall$ u, v $\in R$, हमारे पास है

$P(u + v)=P(u-(-v))$

$\leq P(u) + P(-v) - P(u)P(-v)$

$\leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

i.e., $P(u + v) \leq P(u) + P(v) - P(u)P(v)$

अतः P, R का प्रति – अस्फुट उपवलय है ।

प्रमेय 3 यदि f वलय R से R' पर एक समाकारिता है तथा P व Q क्रमशः R और R' के प्रति – अस्फुट उपवलय है तो f^{-1} (Q), R का प्रति – अस्फुट उपवलय होगा ।

प्रमाण : माना f वलय R से R' पर एक समाकारिता है तथा P व Q क्रमशः R और R' के प्रति – अस्फुट उपवलय है तथा

$\forall\, u,v \in R$ तो $u + v,\ uv \in R$ और $f(u), f(v), f(u + v), f(uv) \in R'$.

अब हमारे पास है :

$(f^{-1} (Q))(u + v)=Q(f(u + v))$

$=Q(f(u) + f(v))$ (f एक समाकारिता है)

$\leq Q(f(u)) + Q(f(v))-Q(f(u))Q(f(v))$

(Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

$=(f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1} (Q))(u)(f^{-1} (Q))(v)$

i.e., $(f^{-1} (Q))(u + v) \leq (f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1} (Q))(u)(f^{-1} (Q))(v)$

और $(f^{-1} (Q))(-u)=Q(f(-u))$

$=Q(-f(u))$ (f एक समाकारिता है)

$\leq Q(f(u))$ (Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

$=(f^{-1} (Q))(u)$

i.e., $(f^{-1} (Q))(-u) \leq (f^{-1} (Q))(u)$

अंततः हमारे पास है

$(f^{-1} (Q))(uv)=Q(f(uv))$

$=Q(f(u)\cdot f(v))$ (f एक समाकारिता है)

$\leq Q(f(u)) + Q(f(v))-Q(f(u))Q(f(v))$

(Q प्रति – अस्फुट उपवलय है)

$=(f^{-1} (Q))(u) + (f^{-1} (Q))(v)-(f^{-1}(Q))(u)(f^{-1}(Q))(v)$

i.e., $(f^{-1}(Q))(uv) \leq (f^{-1}(Q))(u) + (f^{-1}(Q))(v)-(f^{-1}(Q))(u)(f^{-1}(Q))(v)$

अतः f^{-1} (Q), R का प्रति – अस्फुट उपवलय है ।

प्रति – अस्फुट उपवलय के गुणक (*)

परिभाषा 4 माना कि (R, + , .) एक वलय है तथा P एवं Q, वलय R के प्रति – अस्फुट उपवलय है, तब हम दो प्रति – अस्फुट उपवलय P और Q के गुणक (*) को इस प्रकार परिभाषित करते है :–

$$(P * Q)(x)=P(x) + Q(x)-P(x)Q(x), \forall x \in R$$

उपरोक्त प्रति – अस्फुट उपवलयों के गुणक के विचार के आधार पर कुछ रोचक परिणाम स्थापित करते हैं।

प्रमेय 4 यह प्रमाणित करें कि "दो प्रति – अस्फुट उपवलयों का गुणक पुनः एक प्रति – अस्फुट उपवलय होता है ।"

प्रमाण : माना कि P एवं Q, वलय R के कोई दो प्रति – अस्फुट उपवलय है तब

$\forall u,v \in R$: परिभाषा 4 के अनुसार हमारे पास है :–

$$\begin{aligned}(P*Q)(u + v) &= P(u + v) + Q(u + v)-P(u + v)Q(u + v)\\ &\leq [P(u) + P(v)-P(u)P(v)] + [Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + P(v)- P(u)P(v))(Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v))]\\ &= [P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)] + [P(v) + Q(v)-P(v)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))(P(v) + Q(v)-P(v)Q(v))]\\ &= (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(u + v)\leq(P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)$

एवं

$$\begin{aligned}(P*Q)(-u) &= P(-u) + Q(-u)-P(-u)Q(-u)\\ &\leq P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)\\ &= (P*Q)(u)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(-u)\leq(P*Q)(u)$

अंततः हमारे पास है

$$\begin{aligned}(P*Q)(uv) &= P(uv) + Q(uv)-P(uv)Q(uv)\\ &\leq [P(u) + P(v)-P(u)P(v)] + [Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + P(v)- P(u)P(v))(Q(u) + Q(v)-Q(u)Q(v))]\\ &= [P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)] + [P(v) + Q(v)-P(v)Q(v)]-\\ &\quad [(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))(P(v) + Q(v)-P(v)Q(v))]\\ &= (P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)\end{aligned}$$

i.e., $(P*Q)(uv)\leq(P*Q)(u) + (P*Q)(v)-(P*Q)(u)(P*Q)(v)$

इससे यह प्रमाणित होता है कि दो प्रति – अस्फुट उपवलयों का गुणक पुनः एक प्रति – अस्फुट उपवलय होता है ।

प्रमेय 5– यदि P, Q एवं R एक वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलय है, तो प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) साहचर्य एवं क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करता है ।

प्रमाण : माना कि S एक वलय है और P, Q एवं R वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलय है तो

$\forall$ u,$\in$S, परिभाषा 4 के अनुसार हमारे पास है :–

$$[P*(Q*R)](u)=P(u) + (Q*R)(u)-P(u)(Q*R)(u)$$
$$=P(u) + Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)-P(u)[Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)]$$
$$=P(u) + Q(u) + R(u)-Q(u)R(u)-P(u)Q(u) - P(u)R(u) + P(u)Q(u)R(u)$$
$$=P(u) + Q(u)-P(u)Q(u) + R(u)-(P(u) + Q(u)-P(u)Q(u))R(u)$$
$$=(P*Q)(u) + R(u)-(P*Q)(u)R(u)$$
$$=[(P*Q)*R](u)$$
$$\therefore [P*(Q*R)](u)=[(P*Q)*R](u)$$

i.e., $[P*(Q*R)]=[(P*Q)*R]$

अतः वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) साहचर्य गुणधर्म का पालन करता है ।

अंततः हमारे पास है

$(P*Q)(u)=P(u) + Q(u)-P(u)Q(u)$ और $(Q*P)(u)=Q(u) + P(u)-Q(u)P(u)$

चूँकि P(u) एवं Q(u) संवृत्त अंतराल [0,1] में संख्याएँ है, अतः

$$P(u) + Q(u)-P(u).Q(u)=Q(u) + P(u)-Q(u).P(u)$$
$$\therefore (P*Q)(u)=(Q*P)(u)$$
$$\Rightarrow P*Q=Q*P$$

अतः वलय S के प्रति – अस्फुट उपवलयों के द्वारा दर्शाया गया गुणन (*) क्रमविनिमेय गुणधर्म का पालन करता है ।

अभिस्वीकृति

लेखक संजीत कुमार; वैज्ञानिक और औद्योगिक अनुसन्धान परिषद्, नई दिल्ली को वरिष्ठ अनुसंधान अध्येतावृति प्रदान करने के लिए धन्यवाद ज्ञापित करते है ।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Anti - Fuzzy subring	प्रति – अस्फुट उपवलय
Conorm	सहमानक
Homomorphism	समाकारिता

Fuzzification	अस्फुटीकरण
Fuzzy group	अस्फुट समूह
Fuzzy groupoid	अस्फुट समूहाभ
Fuzzy ideal	अस्फुट गुणजावली
Fuzzy ring	अस्फुट वलय
Fuzzy set	अस्फुट समुच्च्य
Fuzzy theory	अस्फुट सिद्धांत

सन्दर्भ

[1] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets", Information and control, 128 (1965) 338-353.

[2] A. Rosenfeld, "Fuzzy Groups'', Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971) 512-517.

[3] R. Biswas., "Fuzzy Subgroup and Anti Fuzzy Subgroups", Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990) 121- 124.

[4] P. S. Das, "Fuzzy Groups and level Subgroups'' Journal of Mathematical Analysis and Applications, 84 (1981) 264-269.

[5] M. K. Singh., "Theory of Fuzzy Structures and Applications", Lambert Academic Publishing, Germany, 2010.

[6] S. Gayen., S. Jha., M. K. Singh., A. K. Prasad, "On Anti- Fuzzy Subgroup", Yugoslav Journal of Operations Research xx (2020).

[7] W. Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and System 8 (1982) 133-139.

[8] Dixit, R. Kumar and N. Ajmal, On fuzzy Rings, Fuzzy Sets and System 49 (1992) 205-213.

[9] F. A. Azam, A. A. Mamun and F. Nasrin, Anti-fuzzy ideal of a ring, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics (2013) 349-360.

[10] T. K. Mukherjee and M. K. Sen, On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy Sets and System 21 (1987) 99-104.

गामा फलनों के योग के पदों वाले सामान्यीकृत $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला

Summation Series Of Generalized $\bar{H}$- Function Having The Sum In Terms Of Gamma Functions

आकिब हामिद डार[1], भारती सक्सेना[2**], कीर्ति वर्मा[3*], रमाकांत भारद्वाज[4]

Aaqib Hamid Dar[1], Bharti Saxena[2**], Kirti Verma[3*],Ramakant Bharadwaj[4]

[1]Research Scholar (Mathematics), Rabindranath Tagore University Raisen, Bhopal, M.P., India

[2] Department of Mathematics, Rabindranath Tagore University Raisen, Bhopal, M.P., India

[3] Department of Engineering Mathematics, Gyan Ganga Institute of Technology and Sciences, Jabalpur, M.P., India

[4] Department of Engineering Mathematics, AMITY University,Kolkata (WB), India

aaqibhamid81@gmail.com, bhartisaxena060@gmail.com, vermalkirti18@gmail.com, rkbhardwaj100@gmail.com

Corresponding authors : Bharti Saxena and Kirti Verma

https://doie.org/10.0121/VP.2025996139

सारांश

गामा फलनों के संदर्भ में व्यक्त योग के साथ सामान्यीकृत $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला की उपयोगिता गणित, भौतिकी, इंजीनियरिंग और सांख्यिकी सहित विभिन्न क्षेत्रों में इसके संभावित अनुप्रयोगों में निहित है। इस शोध पत्र में बताया गया है कि ऐसी संकलन श्रृंखला कैसे उपयोगी हो सकती है। विशिष्ट फलनों से जुड़ी जटिल गणितीय समस्याओं को हल करने के लिए गणितीय विश्लेषण मूल्यवान भूमिका अदा करता है। शोधकर्ता और गणितज्ञ इस संकलन श्रृंखला का उपयोग नई सर्वसमिकाएँ व्युत्पित करने, समाकलों का मूल्यांकन करने और अवकल समीकरणों को हल करने के लिए कर सकते हैं। भौतिकी में कई भौतिक घटनाओं का वर्णन अवकल समीकरणों द्वारा किया जाता है जिनमें $\bar{H}$–फलन जैसे विशिष्ट फलन शामिल होते हैं। कुशल संकलन श्रृंखला होने से इन समीकरणों को हल करने और भौतिक प्रणालियों को सटीक रूप से मॉडलिंग करने में सहायता मिल सकती है। यह क्वांटम यांत्रिकी, सांख्यिकीय यांत्रिकी और विद्युत चुंबकत्व में विशेष रूप से उपयोगी हो सकता है। इंजीनियरों को अक्सर गणितीय मॉडल का सामना करना पड़ता है जिसमें सिस्टम डिजाइन करने और डेटा का विश्लेषण करने जैसे विशिष्ट फलन शामिल होते हैं। संकलन श्रृंखला गणना को सरल बना सकती है, जिससे इलेक्ट्रॉनिक परिपथ, संकेत प्रसंसाधन एल्गोरिथ्म और नियंत्रण प्रणाली जैसे इंजीनियरिंग सिस्टम को डिजाइन और अनुकूलित करना आसान हो जाता है। विशिष्ट फलन, सांख्यिकीय वितरण और संभाव्यता सिद्धांत में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। गामा फलन अभ्यावेदन के साथ $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला सांख्यिकीविदों को बंटन के गुण प्राप्त करने, आघूर्णों की गणना करने और संभावनाओं का अधिक कुशलता से मूल्यांकन करने में मदद कर सकती है। संख्यात्मक गणना, विशिष्ट फलनों की गणना के लिए कुशल एल्गोरिथ्म संख्यात्मक विश्लेषण और वैज्ञानिक कंप्यूटिंग में आवश्यक हैं। संकलन श्रृंखला, $\bar{H}$–फलन और संबंधित मात्राओं के मूल्यांकन के लिए तेज और सटीक कम्प्यूटेशनल तरीकों को विकसित करने के लिए एक आधार प्रदान करता है। शिक्षा और अनुसंधान के क्षेत्र में यह संकलन विशिष्ट फलनों और उनके अनुप्रयोगों में रुचि रखने वाले छात्रों, शिक्षकों और शोधकर्ताओं के लिए एक मूल्यवान संसाधन के रूप में कार्य करता है। इसका उपयोग सैद्धांतिक अवधारणाओं का अध्ययन करने, समस्याओं

को हल करने और शुद्ध और व्यावहारिक गणित में आगे के शोध करने के लिए किया जा सकता है। कुल मिलाकर, गामा फलनों के संदर्भ में व्यक्त योग के साथ सामान्यीकृत $\bar{H}$– फलन की संकलन श्रृंखला की उपयोगिता जटिल गणनाओं को सरल बनाने, सैद्धांतिक विश्लेषण की सुविधा प्रदान करने और विभिन्न विषयों में व्यावहारिक अनुप्रयोगों को सक्षम करने की क्षमता में निहित है। इस शोध पत्र में सामान्यीकृत $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला बनाने का प्रयास किया गया है। $\bar{H}$–फलन की दो श्रृंखलाओं का सारांश दिया गया है। विभिन्न विधियों का उपयोग किया गया है और उन्हें तदनुसार विभिन्न अनुभागों में दिया गया है। कुछ विशेष रोचक मामले और पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पित किये गए हैं। इनमें से कुछ परिणाम सामान्यीकरण करते हैं। सामान्यीकृत $\bar{H}$ –फलन जिसे फॉक्स $\bar{H}$–फलन के रूप में भी जाना जाता है, एक विशेष फलन है जो अतिज्यामितीय फलन सहित कई अन्य विशिष्ट फलनों को सामान्यीकृत करता है। शामिल प्राचल को विशिष्ट बनाने के परिणामस्वरूप, यहां स्थापित परिणाम कई नए और रोचक परिणाम प्रदान करने वाले महत्वपूर्ण सूत्रों के रूप में कार्य करते हैं।

Abstract

The utility of compiling summation series of generalized $\bar{H}$-functions with the sum expressed in terms of gamma functions lies in its potential applications across various fields, including Mathematics, Physics, Engineering and Statistics. Here's how such a compilation could be useful. Mathematical Analysis provides valuable tools for solving complex mathematical problems involving Special Functions. Researchers and Mathematicians can use these summation series to derive new identities, evaluate integrals, and solve differential equations. In Physics, many physical phenomena are described by differential equations that involve special functions like $\bar{H}$-functions. Having efficient summation series can aid in solving these equations and modelling physical systems accurately. This can be particularly useful in Quantum Mechanics, Statistical Mechanics and Electromagnetism. Engineers often encounter mathematical models that involve special functions when designing systems and analyzing data. The summation series can simplify calculations, making it easier to design and optimize engineering systems, such as electronic circuits, signal processing algorithms and control systems. Special Functions play a significant role in statistical distributions and probability theory. Summation series of $\bar{H}$-functions with gamma function representations can help statisticians derive properties of distributions, calculate moments, and evaluate probabilities more efficiently. Numerical Computation Efficient algorithms for computing Special Functions are essential in Numerical Analysis and Scientific Computing. The compilation of summation series provides a basis for developing fast and accurate computational methods for evaluating $\bar{H}$-Functions and related quantities. The compilation serves as a valuable resource for students, educators and researchers interested in Special Functions and their applications. It can be used for studying theoretical concepts, solving problems, and conducting further research in pure and applied Mathematics. Overall, the utility of compiling summation series of generalized $\bar{H}$-functions with the sum expressed in terms of Gamma Functions lies in its ability to simplify complex calculations, facilitate theoretical analyses, and enable practical applications across various disciplines. In this paper an attempt has been made to construct a compilation of summation series of generalized $\bar{H}$-Function, two series of $\bar{H}$-Function are summed. Various methods are used and they are accordingly given in different sections. Some interesting special cases and recurrence relations are deduced. Some of these results generalize. The generalized $\bar{H}$ -Function, also known as the Fox $\bar{H}$-Function is a Special Function that generalizes several other Special Functions,

including the Hyper Geometric Function. As a result by specializing the parameter involved, the results established here act as crucial formulae providing as many fresh and intriguing results.

मुख्य शब्दः $\bar{H}$–फलन, संकलन श्रृंखला, मेलिन–बार्न्स समाकल, बहुचर फलन, गामा फलन.

Key Words: $\bar{H}$-Function, Summation Series, Mellin-Barnes integrals, multivariable function, Gamma Function

परिचय

सामान्यीकृत $\bar{H}$–फलन, जिसे फॉक्स $\bar{H}$–फलन के रूप में भी जाना जाता है, एक विशेष फलन है जो अतिज्यामितीय फलन सहित कई अन्य विशिष्ट फलनों को सामान्यीकृत करता है। $\bar{H}$–फलन को $\bar{H}_{P,Q}^{M,N}$ द्वारा निरूपित किया जाता है और मेलिन–बार्न्स समाकल द्वारा परिभाषित किया जाता है। यह एक बहुचर फलन है जो चार मापदंडों m, n, p और q पर निर्भर करता है [1]। $\bar{H}$–फलन का सामान्य रूप इस प्रकार दिया गया है

$$\bar{H}_{P,Q}^{M,N}[z] = \bar{H}_{P,Q}^{M,N}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j; A_j)_{1,N}, (a_j, \alpha_j)_{N+1,P} \\ (b_j, \beta_j)_{1,M}, (b_j, \beta_j; B_j)_{M+1,Q} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \bar{\phi}(\xi) z^{\xi}\, d\xi, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

<u>जहां</u> $$\bar{\phi}(\xi) = \frac{\prod_{j=1}^{M} \Gamma(b_j - \beta_j \xi) \prod_{j=1}^{N} \{\Gamma(1 - a_j + \alpha_j \xi)\}^{A_j}}{\prod_{j=M+1}^{Q} \{\Gamma(b_j - \beta_j \xi)\}^{B_j} \prod_{j=N+1}^{P} \Gamma(a_j - \alpha_j \xi)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

जिसमें कुछ गामा फलन की आंशिक शक्तियां शामिल हैं। यहाँ, और पूरे शोध पत्र में

a_j मे (j=I,...,P) और b_j मे (j = I ,...., Q) सम्मिश्र संख्याएँ हैं, $\alpha_j \geq 0$ (j =1,…,P), $\beta_j \geq 0$ (j=1,…,Q)

(सभी शून्य एक साथ नहीं) (not all zero simultaneously) और घातांक (exponents) A_jमे (j=1,...,N) और B_j मे प्रतिपादक (j=M +1,...,Q) गैर–पूर्णांक मान ले सकते हैं जिन्हें हम मानकीकरण उद्देश्यों के लिए सकारात्मक मानते हैं। (1) में समोच्च काल्पनिक अक्ष Re (ξ) =0. इसका सटीक रूप पहले उद्धृत शोध पत्रों में देखा जा सकता है। जाहिर है, जब घातांक Aj मे (j =1,...,N) और B_j मे घातांक (j = M +1,...,Q) इकाई के बराबर है; तब $\bar{H}$– फलन सुप्रसिद्ध फॉक्स के H – फलन में बदल जाता है।

हमारे पास है

$$\bar{H}_{P,Q}^{M,N}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j; A_j)_{1,N}, (a_j, \alpha_j)_{N+1,P} \\ (b_j, \beta_j)_{1,M}, (b_j, \beta_j; B_j)_{M+1,Q} \end{matrix} \right] = H_{P,Q}^{M,N}\left[z \middle| \begin{matrix} (a_j, \alpha_j)_{1,P} \\ (b_j, \beta_j)_{1,Q} \end{matrix} \right]$$

जहां फलन में दाहिने हाथ की ओर फॉक्स H— फलन है समीकरण (1) द्वारा दिए गए $\bar{H}$– फलन के लिए परिभाषित पूर्णांक भाग के पूर्ण अभिसरण के लिए निम्नलिखित पर्याप्त स्थितियाँ हैं । समीकरण (1) बुशमैन और श्रीवास्तव द्वारा दिया गया है

$$\Omega = \sum_{j=1}^{M} \beta_j + \sum_{j=1}^{N} A_j \alpha_j - \sum_{j=M+1}^{Q} B_j \beta_j - \sum_{j=N+1}^{P} \alpha_j > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

और $|\arg(z)| < \frac{1}{2} \pi\Omega$, ...(4)

जहां **Ω** समीकरण (3) द्वारा दिया गया है।सक्सेना और गुप्ता द्वारा दर्ज किए गए z के छोटे और बड़े मूल्यों के लिए $\bar{H}$– फलन के निम्नलिखित व्यवहार की अगली कड़ी में आवश्यकता होगी।

$\bar{H}_{P,Q}^{M,N}[z] = O(|z|^g)$ छोटे z के लिए, जहां $g = \min_{1 \le j \le M} [Re(b_j/\beta_j)]$, और

$\bar{H}_{P,Q}^{M,q}[z] = O(|z|^h)$ बड़े z के लिए, जहां $h = \max_{1 \le j \le N} Re[A_j \{(a_j - 1)/\alpha_j\}]$, तथा समीकरणों (3) और (4) द्वारा दी गई शर्तें भी पूरी होती हैं। यहाँ

$$H[z] = H_{p,q}^{m,n}\left[x \left| \begin{matrix} (c_j, y_j)_{1,q} \\ \\ (d_j, \delta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s) z^s ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\textbf{जहां } i = \sqrt{-1}\text{, और}\quad \theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(d_j - \delta_j s \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1 - c_j + y_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - d_j + \delta_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(c_j - y_j s)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

समोच्च रेखा L की प्रकृति अभिन्न (5) के अभिसरण की शर्तें और H— फलन के अन्य गुणों को किलबास और साइगो द्वारा संदर्भित लिखित पुस्तक से लिया गया है । $\bar{H}$– फलन में विभिन्न गुण और विशेष मामले हैं, और विशिष्ट योग सूत्र पैरामीटर या शर्तों के मूल्यों पर निर्भर हो सकते हैं [2]। $\bar{H}$– फलन के लिए बंद–फॉर्म अभिव्यक्तियाँ हमेशा उपलब्ध नहीं होती हैं, और संख्यात्मक या स्पर्शोन्मुख तरीकों का उपयोग अक्सर मूल्यांकन के लिए किया जाता है, यदि आपके पास मापदंडों या शर्तों के लिए विशिष्ट मान है।सामान्यीकृत $\bar{H}$– फलन के लिए योग सूत्र सरल कार्यों के लिए उतना सीधा नहीं है, और इसे अक्सर मेलिन–बार्न्स समाकल के संदर्भ में व्यक्त किया जाता है । सामान्य तौर पर $\bar{H}$– फलन के लिए कोई सरल बंद–रूप अभिव्यक्ति नहीं है। हालाँकि, यदि कोई विशिष्ट पैरामीटर मान या शर्तें हैं, तो इसे अधिक प्रबंधनीय रूप में व्यक्त करने के लिए अभिव्यक्ति को सरल बनाना या $\bar{H}$– फलन के कुछ गुणों का उपयोग करना संभव हो सकता है [3]।

मुख्य योग सूत्र

सूत्र - 1

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} sin\emptyset \sum_{r=0}^{n} \frac{(cos\emptyset-1)^r}{r!\,(n-r)!\,2^r}\ \overline{H}_{p+1,q+1}^{k+1,l}\left[\frac{z}{sin^2\emptyset}\middle|\begin{matrix} {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_{l,l+1}(a_j,A_j)_p(\frac{3}{2}+r,1) \\ (2+n+r,2),{}_1(b_j,B_j)_k,{}_{k+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!r!}\ \boldsymbol{sin(n+2r+1)}\emptyset \overline{H}_{\boldsymbol{p+2,q+2}}^{\boldsymbol{k+1,l+1}}\left[Z\middle|\begin{matrix} (1-r,1;1),{}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_l,{}_{l+1}(a_j,A_j)_p,(2+n+r,1) \\ (2+n,2),{}_1(b_j,B_j)_k,{}_{k+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q), \end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots(7)$$

बशर्ते n गैर–नकारात्मक पूर्णांक है, 0 ≦Ø≦π , θ >0 और $|\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}$,

जहां, $\theta = < \sum_{j=1}^{m}|B_j| + \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j A_j| - \sum_{j=m+1}^{q}|\beta_j B_j| - \sum_{j=n+1}^{p}|A_j| >$

प्रमाण: समीकरण (1) को सिद्ध करने के लिए

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2^{2s}(n+r)!\,\Gamma(n+2-2s)\Gamma(r+s)\sin(n+2r+1)\varphi}{\Gamma(1-s)\Gamma(s)n!\,r!\,\Gamma(n+r+2-s)} \quad \ldots\ldots(8)$$

बशर्ते, S < 1, 0 ≦ Ø ≦ π और n, एक गैर–नकारात्मक पूर्णांक है |

समीकरण(8) के दोनों पक्षों को व्यंजक $(2\pi i)^{-1}\theta(s)\,\boldsymbol{\Gamma}(1\text{-}s)\left(\frac{Z}{4}\right)^{s}$, से गुणा करें जहां, θ(s) द्वारा परिभाषित किया गया है

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j - B_j s\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma^{a_j}(1-a_j+A_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma^{\beta_j}(1-b_j+B_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j - A_j s)}$$

P_n^{1-s} (CosØ) को p_n^r(z) द्वारा दी गई श्रृंखला से प्रतिस्थापित करना $p_n^r(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(2r)_{n+k}(z-1)^k}{2^k(n-k)!(r+\frac{1}{2})_k}$
और समोच्च समाकल L के साथ एकीकरण (integrating along the contour integral L) में परिभाषित किया गया है।

$$\bar{H}^{m,n}_{p,q}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (a_1, A_1; \alpha_1), \ldots, (a_n, A_n; \alpha_n), (a_{n+1}, A_{n+1}), \ldots, (a_p, A_p) \\ (b_1, B_1), \ldots\ldots\ldots, (b_m, B_m), (b_{m+1}, B_{m+1}, \beta_{m+1}), \ldots\ldots, (b_q, B_q; \beta_q) \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s) z^s \, ds \quad \ldots\ldots(9)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{4\pi i} \sin\emptyset \int_L \theta(s) Z^s \frac{\Gamma(n+2-2s)}{n!\,\Gamma s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\cos\emptyset - 1)^r \;\; (2+n+r-2s)}{2^r\, r!\,(n-r)!\,\Gamma(\frac{3}{2}+r-s)} ds$$

$$= (2\pi\, i)^{-1} \int_L \theta(s) z^s \frac{\Gamma(n+2-2s)}{n!\Gamma s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!\,\Gamma(r+s)\sin(n+2r+1)\emptyset}{r!\,\Gamma(n+r+2-s)} ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

परिणाम एकीकरण और योग के चरणों को पुनर्व्यवस्थित करके और (9) लागू करके प्राप्त किया जा सकता है। क्योंकि श्रृंखला परिमित है और समाकल मौजूद है, इसलिए योग और एकीकरण के अनुक्रम में बाईं ओर का संशोधन उचित है। यह दाईं ओर समझ में आता है क्योंकि श्रृंखला s के संबंध में समान रूप से अभिसरित होती है [4]।

$\theta(s) = z^s \frac{\Gamma(n+2-2s)}{n!\Gamma(s)}$ निरंतर है और दी गई शर्तें पूरी होने पर समाकल्य बिल्कुल अभिसरित होता है [5]।

विशेष स्थितियां

समीकरण (7) में जब α_j=1, , के लिए j = 1,2,......... , और β_j =1, के लिए j = m+1. ...... q, रखने पर समीकरण (1) H— फलन के लिए योग में बदल देता है जो फॉक्स द्वारा दिया गया है

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\emptyset \sum_{r=0}^{n} \frac{(\cos\emptyset - 1)^r}{r!\,(n-r)!\,2^r}\; \bar{H}^{k+1,l}_{p+1,q+1}\left[\frac{z}{\sin^2\emptyset} \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j)_p, (\frac{3}{2}+r, 1) \\ (2+n+r, 2),\; {}_1(b_j, B_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(n+r)!}{n!r!} \sin(n+2r+1)\,\emptyset\, \bar{H}^{k+1,l+1}_{P+2,q+2}\left[Z \,\middle|\, \begin{matrix} (1-r, 1),\; {}_1(a_j, A_j)_p, (2+n+r, 1) \\ (2+n, 2),\; {}_1(b_j, B_j)_q \end{matrix}\right] \quad \ldots..(11)$$

बशर्ते n गैर–नकारात्मक पूर्णांक है, 0 ≦Ø≦π , θ >0 और $|\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}$,

जहां, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} A_j - \sum_{j=n+1}^{p} A_j + \sum_{j=1}^{m} B_j - \sum_{j=m+1}^{q} B_j > 0$ ……………………….(12)

समीकरण (7) को n के सम अथवा विषम होने के अनुसार भिन्न–भिन्न समीकरणों से व्यक्त किया जाता है | [7]

यदि n सम हो तो,

$$\sum_{r=0}^{2m} \frac{(\cos Ø - 1)^r}{r!\,(2m-r)!\,2^r}\, \overline{H}_{p+1,q+1}^{k+1,l} \left[z \middle| \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_{l},\ {}_{l+1}(a_j, A_j)_p, (\frac{3}{2}+r, 1) \\ \\ (2+m+r, 2),\ {}_1(b_j, B_j)_k,\ {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q \end{matrix} \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2(2m+r)!\,(m+r)!}{(2m)!\,r!\,\Gamma(\frac{1}{2}+m+r)}\, P_{m+r}^{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(\cos 2Ø) \times \overline{H}_{p+2,q+2}^{k+1,l+1} \left[z\sin^2 Ø \middle| \begin{matrix} (1-r, 1; 1), \\ \\ (2+2m, 2), \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_l\ \ {}_{l+1}(a_j, A_j)_P, (2+2m+r, 1) \\ \\ {}_1(b_j, B_j)_k,\ {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q, (1,1; 1), \end{matrix} \right] \quad ……………………………………….(13)$$

यदि n विषम हो तो,

$$\sum_{r=0}^{2m+1} \frac{(\cos Ø - 1)^r}{2^r r!\,(2m+1-r)!}\, \overline{H}_{p+1,q+1}^{k+l,l} \left[Z \middle| \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_l,\ {}_{l+1}(a_j, A_j)_p, (\frac{3}{2}+r, 1) \\ \\ (3+2m+r, 2),\ {}_1(b_j, B_j)_k,\ {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{4\cos Ø}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+2m+r)!}{(1+2m)!\,r!} U_{m+r}(a\cos 2Ø) \times \overline{H}_{p+2,q+2}^{k+l,l+1} \left[z\sin^2 Ø \middle| \begin{matrix} (1-r, 1; 1), \\ \\ (2m+3, 2), \end{matrix} \right.$$

$$
\left.\begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_l \, , \, {}_{l+1}(a_j, A_j)_p \, , (3+2m+r, 1) \\ \\ {}_1(b_j, B_j)_k \, , \, {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q, (1,1;1) \end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)
$$

बशर्ते n गैर–नकारात्मक पूर्णांक है, $0 \leq \emptyset \leq \pi$, $\theta > 0$ और $|\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}$ है।

जहां, θ समीकरण (2) द्वारा दिया जाता है और Δ समीकरण (12) द्वारा दिया जाता है [8]

समीकरण (7) में n = 1 रखें और z को $z\sin^2\emptyset$, r को r–1 से, ${}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_l, {}_{l+1}(a_j,A_j)_P$

से प्रतिस्थापित करें

${}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_l, {}_{l+1}(a_j,A_j)_p$, (3,2) और ${}_1(b_j,B_j)_k, {}_{k+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q$ द्वारा

(3/2,1), ${}_1(b_j,B_j)_{k.} {}_{k+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q$ हमें $\bar{H}$– फलन के लिए निम्नलिखित योग सूत्र समीकरण (15) से प्राप्त होता है [9]।

$$
\bar{H}^{k,l}_{p,q}\left[Z \middle| \begin{matrix} {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_l \, , \, {}_{l+1}(a_j, A_j)_p \\ \\ {}_1(b_j, B_j)_k \, , \, {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q \end{matrix} \right]
$$

$$
= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\cos 2\emptyset) \bar{H}^{k+1,l+1}_{p+2,q+2}\left[z\sin^2\emptyset \middle| \begin{matrix} (1-n,1;1), \, {}_1(a_j, A_j; \alpha_j)_l \, , \\ \left(\frac{3}{2}, 1\right), \, {}_1(b_j, B_j)_k \, , \end{matrix} \right.
$$

$$
\left.\begin{matrix} {}_{l+1}(a_j, A_j)_p \, , (3+n, 1) \\ \\ {}_{k+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q \, , (1,1;1) \end{matrix}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)
$$

बशर्ते n गैर–नकारात्मक पूर्णांक है, $0 \leq \emptyset \leq \pi$, $\theta > 0$ और $|\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}$, है।

जहां, θ (8) द्वारा दिया जाता है [10]। .

समीकरण (9) में $\alpha_j = 1$, के लिए j = 1,2, ………,n और β_j=1, j=1 के लिए j = m+1, … ,q, रखने पर, एक योग सूत्र प्राप्त होता है, जो समीकरण (16) में दिया गया है [11]।

$$\bar{H}^{k,l}_{p,q}\left[Z\left|\begin{matrix} {}_1(a_j,A_j)_p \\ \\ {}_1(b_j,B_j)_q \end{matrix}\right.\right]$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)U_n(\cos 2\emptyset)\bar{H}^{k+1,l+1}_{p+2,q+2}\left[z\sin^2\emptyset\left|\begin{matrix} (1-n,1),\ {}_1(a_j,A_j)_p,(3+n,1) \\ \\ \left(\frac{3}{2},1\right),\ {}_1(b_j,B_j)_q,(1,1) \end{matrix}\right.\right] \quad \text{......(16)}$$

बशर्ते n गैर–नकारात्मक पूर्णांक है, 0 ≦Ø≦π , θ >0 और $|\arg z| < \frac{\theta\pi}{2}$, जहां Δ दिया गया है (6)।

सूत्र – 2

$$\bar{H}^{m,n+l}_{P+l,q+l}\left[z\alpha\left|\begin{matrix} {}_1(c_j,D_j;1)_l,\ {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_j)_P \\ \\ {}_1(b_j,B_j)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q,\ {}_1(d_j,D_j;1)_l \end{matrix}\right.\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(-k)\alpha^k}\ {}_{l+1}\Psi_l\left[\begin{matrix} (-k,1)\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix};\alpha\right] \times$$

$$\bar{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[z\left|\begin{matrix} {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_j)_p,(1-k,1) \\ \\ (1,1),\ {}_1(b_j,B_j)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix}\right.\right] \quad \text{..(17)}$$

जब, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix} ;\alpha \right] \times$$

$$\bar{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1} \left[z \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_j)_p,(0,1) \\ \\ (K,1),\ {}_1(b_j,B_j)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix} \right. \right] \text{............(18)}$$

जब, $0 < \alpha < 1$

बशर्ते $\mathrm{Re}(c_j) > \mathrm{Re}(d_j) > 0$ for j =1,2, ...,l , θ >0 , $|\arg z| < \frac{\pi\theta}{2}$,

जहां, θ (8) द्वारा दिया जाता है .

प्रमाण: बाएँ ओर = $\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(1-c_j+D_js)}{\Gamma(1-d_j+D_js)}(\alpha\, z)^s ds$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s) z^s \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (s)_k}{\alpha^k k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix} ;\alpha \right] ds$$

का उपयोग करते हुए (13) अर्थात

$$\alpha^s \prod_{j=1}^{k}\left\{\frac{\Gamma(d_j+D_js)}{\Gamma(c_j+D_js)}\right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{\alpha})^r (s)_r}{r!\,\Gamma(-r)}\ {}_{k+1}\Psi_k \left[\begin{matrix} (-r,1),{}_1(d_j,D_j)_k \\ \\ {}_1(c_j,D_j)_k \end{matrix} ;\alpha \right] \text{........(19)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(-k)\alpha^k}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix} ;\alpha \right] \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\theta(s)\Gamma(1-s)}{\Gamma(1-k-s)} z^s ds\ ,$$

योग और एकीकरण का क्रम बदलना। यह सिद्ध होता है (19)।(15) का प्रमाण समान है; (19) के स्थान पर,

$$\frac{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(d_j - D_j s)}{\prod_{j=1}^{k}\Gamma(c_j - D_j s)} = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(s)_r}{r!\,\Gamma(-r)^{k+1}}\Psi_k\left[\begin{matrix}(-r,1),{}_1\ (d_j,D_j)_k \\ \\ {}_1(c_j,D_j)_k\end{matrix};\frac{1}{\alpha}\right] \quad \ldots\ldots..(20)$$

(20) का प्रयोग α और s के साथ क्रमशः 1/α और - s द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। योग और अंतःक्रिया के क्रम में परिवर्तन उचित है क्योंकि, श्रृंखला

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l\left[\begin{matrix}(-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l\end{matrix};\ \alpha\right]$$

एक अंतराल a ≦ s ≦ b में समान रूप से परिवर्तित होता है। θ(s) सतत है और समाकलन तब विद्यमान होता है जब दी गई शर्तें पूरी होती हैं। [14]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s) z^s \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k (s)_k}{\alpha^k k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l\left[\begin{matrix}(-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l\end{matrix};\ \alpha\right] ds$$

विशेष स्थितियां

समीकरण [17] में α_j =1, के लिए j= 1, 2 , ..., n और β_j = 1 के लिए j = m+1, ... -q, रखने पर H— फलन के लिए योग में बदल देता है जो H— फलन मैजर द्वारा दिया गया है :

$$\bar{H}_{p+l,q+l}^{m,n+l}\left[z\alpha\left|\begin{matrix}{}_1(c_j,D_j)_l\,,\ {}_1(a_j,A_j)_p \\ \\ {}_1(b_j,B_j)_q\,,\ {}_1(d_j,D_j)_l\end{matrix}\right.\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(-k)\alpha^k}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix} ;\alpha \right] \bar{H}^{m+1,n}_{P+1,q+1}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,A_j)_p,(1-k,1) \\ \\ (1,1),\ {}_1(b_j,B_j)_q \end{matrix} \right. \right] \ldots.(21)$$

जब, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),\ {}_1(1-c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j,D_j)_l \end{matrix} ;\alpha \right] \times \bar{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,A_j)_p,(0,1) \\ \\ (k,1),\ {}_1(b_j,B_j)_q \end{matrix} \right. \right] \ldots\ldots\ldots.(22)$$

जब, 0<α<1, $\mathrm{Re}\,c_j >$ $\mathrm{Re}\,d_j > 0$ जहाँ, j =1,2,... Δ>0, के लिए, और
| arg z| < Δπ/2 , जहाँ, Δ (12) द्वारा दिया गया है। [12]

$$\bar{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[z \left| \begin{matrix} 1(a,\alpha;1),\ {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_j)_p \\ {}_1(b_j,B_j)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q,(a+r,\alpha;1) \end{matrix} \right. \right]$$

$$= (-1)^r\, \bar{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[z \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,A_jk;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_jk)_p,(a,\alpha) \\ \\ {}_1(a+r,\alpha),\ {}_1(b_j,B_jk)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_jk;\beta_j)_q \end{matrix} \right. \right]$$

$\bar{H}$– फलन के निम्नलिखित परिणाम (17) और (18) क्रमशः (11) और (12) से निकाले जा सकते हैं।

$$\bar{H}^{m+l,n}_{p+l,q+l}\left[z\alpha \left| \begin{matrix} {}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ {}_{n+1}(a_j,A_j)_p,\ {}_1(c_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(d_j,D_j)_l,\ {}_1(b_j,B_j)_m,\ {}_{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q, \end{matrix} \right. \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!\,\Gamma(-k)}\ {}_{l+1}\Psi_l \left[\begin{matrix} (-k,1),(d_j,D_j)_l \\ \\ {}_1(c_j,C_j)_l \end{matrix} ;\frac{1}{\alpha} \right] \times$$

$$\overline{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[z\left|\begin{matrix}(0,1;1),\ _1(a_j,A_j,\alpha_j)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_P\\ \\ _1(b_j,B_j)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q,(k,1;1)\end{matrix}\right.\right] \quad \text{.......(23)}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(-k)}\ _{l+1}\Psi_l\left[\begin{matrix}(-k,1),\ _1(d_j,D_j)_l\\ \\ _1(c_j,C_j)_l\end{matrix};\frac{1}{\alpha}\right]\times$$

$$\overline{H}^{m,n+1}_{p+1,q+1}\left[z\left|\begin{matrix}(1-k,1;1)\ _1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q,(1,1;1)\end{matrix}\right.\right] \quad \text{.......(24)}$$

जब, 2 >α > 1, $Rec_j > Red_j > 0$ जहा j=1,2,... Δ>0, के लिए, और | arg z| < Δπ/2 , जहाँ, θ (8) द्वारा दिया गया है। [13]

2. निम्नलिखित परिणाम प्राप्त करने के लिए परिणाम (17), (18) में D_j=1, j = 1, 2, ..., l रखने पर:

$$\overline{H}^{m,n+l}_{p+l,q+l}\left[z\alpha\left|\begin{matrix}_1(c_j,1;1)_l,\ _1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q,\ _1(d_j,1;1)_l\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{l}\frac{\Gamma(1-c_j)}{\Gamma(1-d_j)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\alpha^k}\ _{l+1}F_1\left[\begin{matrix}(-k),\ _1(1-c_j)_l\\ \\ _1(1-d_j)_l\end{matrix};\alpha\right]\times$$

$$\overline{H}^{m+1,n}_{p+1,q+1}\left[z\left|\begin{matrix}_1(a_j,A_j;\alpha_j)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p,(1-k,1)\\ \\ (1,1),\ _1(b_j,B_j)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q\end{matrix}\right.\right] \quad \text{.......(25)}$$

जब, $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

$$= \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(1-c_j)}{\Gamma(1-d_j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \; {}_{k+l}F_l \left[\begin{matrix} {}_1(-k)_l \,,\, {}_1(1-c_j)_l \\ \\ {}_1(1-d_j)_l \end{matrix} ; \alpha \right] \times$$

$$\bar{H}_{p,q}^{m,n} \left[z\alpha \,\middle|\, \begin{matrix} {}_1\left(a_j, A_j; \alpha_j\right)_n \,,\, {}_{n+1}(a_j, A_j)_p \\ \\ {}_1\left(b_j, B_j\right)_m \,,\, {}_{m+1}(b_j, B_j; \beta_j)_q \end{matrix} \right] \quad \ldots\ldots(26)$$

जब, $0 < 1 < \alpha$,

$$= \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(d_j)}{\Gamma(c_j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \; {}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} (-k)_1 \,,\, {}_1(d_j)_l \\ \\ {}_1(c_j)_l \end{matrix} ; \frac{1}{\alpha} \right] \times$$

$$\bar{H}_{p,q}^{m,n} \left[z \,\middle|\, \begin{matrix} (0,1;1),{}_1\left(a_j, A_j; \alpha_j\right)_n \,,\, {}_{n+1}(a_j, A_j)_p \\ \\ {}_1\left(b_j, B_j\right)_m \,,\, {}_{m+1}\left(b_j, B_j; \beta_j\right)_q \,, (k,1;1) \end{matrix} \right] \quad \ldots\ldots(27)$$

जब, $2>\alpha>1$

जब, 2>α>1

$$= \prod_{j=1}^{l} \frac{\Gamma(d_j)}{\Gamma(c_j)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \; {}_{l+1}F_l \left[\begin{matrix} (-k)_1 \,,\, {}_1(d_j)_l \\ \\ {}_1(c_j)_l \end{matrix} ; \frac{1}{\alpha} \right] \times$$

$$\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[z \middle| \begin{matrix} (1-k,1;1),_1\left(a_j,A_j;\alpha_j\right)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p \\ \\ _1\left(b_j,B_j\right)_m,\ _{m+1}\left(b_j,B_j;\beta_j\right)_q,(1,1;1) \end{matrix}\right] \quad ....(28)$$

बशर्ते कि जब 1< α, (24) के तहत दी गई शर्तें पूरी हों।

जब $l = 0$, α पर स्थिति में ढील दी जा सकती है और फिर परिणाम (25) से (28) निम्नलिखित रूप लेते हैं।

$$\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[z\alpha \middle| \begin{matrix} _1\left(a_j,A_j;\alpha_j\right)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p \\ \\ _1\left(b_j,B_j\right)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix}\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{\alpha}-1)^k}{k!}\overline{H}_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left[z \middle| \begin{matrix} _1\left(a_j,A_j;\alpha_j\right)_n,\ _{n+1}\left(a_j,A_j\right)_p,(1-k,1) \\ \\ (1,1),\ _1\left(b_j,B_j\right)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix}\right] ......(27)$$

बशर्ते, $\left|\frac{1}{\alpha}-1\right| < 1;$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^k}{k!}\ \overline{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[z \middle| \begin{matrix} (0,1;1),\ _1\left(a_j,A_j;\alpha_j\right)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p \\ \\ (k,1),\ _1\left(b_j,B_j\right)_m,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q \end{matrix}\right] ....(28)$$

बशर्ते, $|1-\alpha| < 1;$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\ \overline{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[z \middle| \begin{matrix} (0,1;1),\ _1\left(a_j,A_j;\alpha_j\right)_n,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p \\ \\ _1\left(b_j,B_j\right)_m,\ _{m+1}\left(b_j,B_j;\beta_j\right)_q,(k,1;1) \end{matrix}\right] ......(29)$$

बशर्ते, $|1-\alpha|<1;$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{1}{\alpha})^k}{k!}\bar{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[z\left|\begin{matrix}(1-k,1;1),\ _1(a_j,A_j;\alpha_j)_n\ ,\ _{n+1}(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_m\ ,\ _{m+1}(b_j,B_j;\beta_j)_q\ ,(1,1;1)\end{matrix}\right.\right] \quad .....(30)$$

बशर्ते $|1-\alpha|<1$, परिणाम(27) से (30) में सशर्त हैं, $\theta>0$ और $|\arg z|<\frac{\theta\pi}{2}$.जहाँ, θ (2) द्वारा दिया गया हैं। जब $\alpha_j=1$, j = 1,2, … … …,n के लिए, और β_j=1, के लिए j = m+1, … .q,, (33)से (32) में परिवर्तन कर देता है:

$$\bar{H}_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}_1(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_q\end{matrix}\right.\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{\alpha}-1)^k}{k!}\bar{H}_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left[z\left|\begin{matrix}_1(a_j,A_j)_p,(1-k,1)\\ \\ (1,1),\ _1(b_j,B_j)_q\end{matrix}\right.\right] \quad ....(31)$$

बशर्ते, $\left|\frac{1}{\alpha}-1\right|<1;$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\alpha)^k}{k!}\bar{H}_{p+1,q+1}^{m+1,n}\left[z\left|\begin{matrix}_1(a_j,A_j)_p\ ,(0,1)\\ \\ (k,1),\ _1(b_j,B_j)_q\end{matrix}\right.\right] \quad ....(32)$$

बशर्ते, $|1-\alpha|<1$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)^k}{k!}\bar{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[z\left|\begin{matrix}(0,1),\ _1(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_q\ ,(k,1)\end{matrix}\right.\right] \quad ....(33)$$

बशर्ते, $|1-\alpha|<1;$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{1}{\alpha})^k}{k!}\bar{H}_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left[z\left|\begin{matrix}(1-k,1),\ _1(a_j,A_j)_p\\ \\ _1(b_j,B_j)_q\ ,(1,1)\end{matrix}\right.\right] \quad ....(34)$$

बशर्ते, $\left|1-\frac{1}{\alpha}\right|<1$; परिणाम (31) से (34) में अतिरिक्त शर्तें $\Delta>0$, $|\arg z|<\frac{\pi}{2}\Delta$.

जहां, Δ (12) द्वारा दिया गया है। जब $A_j = B_j = 1$,समीकरण (31) से (34) में रखने पर श्रीवास्तव एवं अन्य [6] के परिणाम मिलते हैं ।

निष्कर्षः

$\bar{H}$– फलन की संकलन श्रृंखला की उपयोगिता विभिन्न गणितीय कार्यों को व्यक्त करने और जटिल गणितीय समस्याओं को हल करने की क्षमता में निहित है। $\bar{H}$– फलन, जिसे फॉक्स के $\bar{H}$– फलन के रूप में भी जाना जाता है, एक विशेष फलन है जो कई अन्य विशिष्ट फलनों को सामान्यीकृत करता है। इसकी श्रृंखला का प्रतिनिधित्व काफी जटिल हो सकता है और इसमें शामिल $\bar{H}$– फलन के विशिष्ट मापदंडों और स्थितियों पर निर्भर करता है। $\bar{H}$– फलन और इसकी श्रृंखला प्रतिनिधित्व की उपयोगिता कार्यों की एक विस्तृत श्रृंखला को व्यक्त करने की क्षमता में निहित है, विशेष रूप से गणितीय भौतिकी और इंजीनियरिंग में सामने आने वाले कार्यों को व्यक्त करने की क्षमता में। विशिष्ट फलनों का सामान्यीकरण $\bar{H}$– फलन की संकलन श्रृंखला एक सामान्यीकरण है जिसमें कई प्रसिद्ध विशेष फलन शामिल हैं, जैसे अतिज्यामितीय फलन, मीजर का जी–फलन और अन्य। यह विभिन्न गणितीय कार्यों के एकीकृत उपचार की अनुमति देता है। अवकल समीकरणों को हल करना $\bar{H}$–फलन की संकलन श्रृंखला अक्सर भौतिकी, इंजीनियरिंग और अन्य वैज्ञानिक क्षेत्रों में अवकल समीकरणों के समाधान के रूप में उत्पन्न होते हैं।

सन्दर्भः

1. Merjer, C. S. (1952). Expansion theorem for G –function I, integatious Maths, 14 , P.P. 483 -487.
2. Murray, R Spiegel (1962): some interesting special cases of the hyper-geometric series. Amer. Math Monthly, 69,pp 894 – 896.
3. R. G. Buchman and K. C. Gupta (1975): Contiguous relations for the H – function of two variables Indian J. Pure Appl. Math., 6, 1416 – 1421.
4. H.M. Srivastava and R.Panda (1979): Some multiple integral transformations involving the H – function of several variables, Nederi . Akad. Wetensch. Proc. Ser . A 82 Indag. Math., 41, 353 – 362.
5. Saxena, V.P. (1982): Formal solution for certain new pair of integral equations, involving H – function, Prot. Nat. Sci. India 52(a), 111,p.p. 365 – 275.
6. H.M. Srivastava, K. C. Gupta and S. P. Goyal (1982): The H – functions of One and Two variables with Applications. South Asian Publishers, New Delhi and Madras.
7. Inayat Hussain, A. A. (1987): Expansion theorem for G – function II, Integatious Maths, 14,, p.p. 483 – 487
8. Rajesh Shrivastava and Kirti Verma (2009) : certain Double Integral involving I – function. The Mathematical Education, Siwan (Bihar), Vol. XLIII(1) p.p 1-10 1/3/(2009). ISSN 0047-6269.
9. Kirti Verma, Rajesh Shrivastava(2010) :Integration of the I- function w.r.t.parameters. Vijnanan Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 54.Oct.2010No.4,p. P. 1 -7. ISSN -0505-5806.
10. Kirti Verma, Rajesh Shrivastava and A.K.Ronghe (2013): Application of I – Function In Jacobi Polynomial kinds of Non – linear Differential equations. The Mathematical Education,Siwan(Bihar),Vol.XLIII No. 2. ISSN 0047 – 6269.
11. Kirti Verma, Rajesh Shrivastava and A. K. Ronghe (2013): On Boundary value Problem and its application in I – function of Multivariable. Mathematical Theory and Modeling. ISSN 2224 – 5804 (paper) ISSN 2225-0522 (online) Vol. 3 No. 6, p.p. 121 – 126, IISTE Journal, U.S.A.

12. Kirti Verma, Rajesh Shrivastava and A .K. Ronghe (2014): nth finite integrals involving product of multivariable. International Research Journal of Pure Algebra R.J.P.A.4(6),28/6/2014, ISSN 2248-9037. www.rjpa.info (4-43).
13. Kirti Verma, Rajesh Srivastava and A.K. Ronghe (2015): Expansion for Product of Bessel's Function and I- Function Of Multivariables. Mathematical .Theory and Modeling www.iiste. Org ISSN 2224-5804 (Paper), ISSN 2225-0522 (Online), Vol.5, no.7.
14. Kirti Verma, Rajesh Shrivastava and A.K. Ronghe (2015):Study of Expansion For I-Function of Multivariable And Its Application. Mathematical. Theory and Modeling www.iiste .org, ISSN 2224 – 5804 (Paper), ISSN 2225-0522 (Online)Vol.5,No.7.

संस्कृत कैसे सीखें ?

How to Learn Sanskrit?

आकृति ठाकुर[1], योगेश शर्मा[2]

Aakriti Thakur[1], Yogesh Sharma[2]

[1] शोधच्छात्रा, संस्कृत, दर्शन एवं वैदिक अध्ययन विभाग, वनस्थली विद्यापीठ, राजस्थान

[2]सह आचार्य – कलाकोश विभाग, इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय कला केन्द्र, नई दिल्ली

aakritithakur2@gmail.com, ycsharma2000@yahoo.co.in

https://doie.org/10.0121/VP.2025568057

प्रस्तुत लेख में संस्कृत के सम्यक् अवबोध एवं प्रयोग को समझने में सहायक प्रत्यय पर विचार किया जा रहा है। प्रत्यय अर्थबोध में वाक्य निर्मिति के प्रमुख घटक हैं। वाक्य की संरचना में अनेक भिन्न–भिन्न पदों का प्रयोग होता है। इनमें से कुछ पद कर्ता की भूमिका में होते हैं। कुछ पद संज्ञा, विशेषण आदि की भूमिका में होते हैं। कुछ पद क्रिया की भूमिका में होते हैं। प्रायशः सभी पदों की निर्मिति में प्रकृति–प्रत्यय की ही भूमिका होती है। प्रत्ययों में कुछ प्रत्यय धातु के साथ लगकर कर्ता, कर्म, करण, विशेषण, संज्ञा आदि का निर्माण करते हैं तो कुछ प्रत्यय क्रियापद का निर्माण करते हैं। पूर्णतः क्रियापद के रूप में प्रयुक्त होने वाले प्रत्यय 'तिङ्' होते हैं, जिनका उल्लेख प्रथम लेख में संक्षेप में किया जा चुका है। ये प्रत्यय कर्ता से सम्बद्ध क्रियापद के रूप में वचन और पुरुष के अनुसार प्रयुक्त होते हैं। तिङ् प्रत्ययों में से प्रथम नौ निम्नलिखित हैं–

पुरुष / वचन	एकवचन	द्विवचन	बहुवचन
प्रथमपुरुष	तिप्	तस्	झि
मध्यमपुरुष	सिप्	थस्	थ
उत्तमपुरुष	मिप्	वस्	मस्

ये प्रत्यय परस्मैपद के रूप में प्रयुक्त होते हैं। इसके अन्तर्गत कर्ता की क्रिया का फल किसी अन्य को प्राप्त होता है। जैसे– सः ओदनं पचति। (वह भात पकाता है।)

उपर्युक्त वाक्य में भात पकाने का कार्य किसी अन्य के लिए किया जा रहा है, अर्थात् पके हुए चावलों को वह स्वयं नहीं खायेगा। इसी प्रकार अन्तिम नौ प्रत्यय निम्नलिखित हैं–

पुरुष / वचन	एकवचन	द्विवचन	बहुवचन
प्रथमपुरुष	त	आताम्	झ
मध्यमपुरुष	थास्	आथाम्	ध्वम्
उत्तमपुरुष	इट्	वहि	महिङ्

ये प्रत्यय आत्मनेपद के रूप में प्रयुक्त होते हैं। इसके अन्तर्गत कर्ता की क्रिया का फल स्वयं कर्ता को प्राप्त होता है। जैसे– सः ओदनं पचते। (वह अपने लिए भात पकाता है।)

उपर्युक्त वाक्य में भात पकाने का कार्य स्वयं के लिए किया जा रहा है अर्थात् पके हुए चावलों को वह स्वयं खायेगा।

उपर्युक्त 18 तिङ् प्रत्ययों से सभी दस लकारों (लट्, लङ्, लुङ्, लिट्, लुट्, लृट्, लृङ्, लोट्, विधिलिङ् एवं आशीर्लिङ्) की निर्मिति होती है अर्थात् किसी भी कर्ता के द्वारा की जाने वाली किसी भी क्रिया का किसी भी काल में अथवा किसी भाव में किया गया प्रयोग, इन 18 तिङ् प्रत्ययों से ही होता है। उदाहरण के लिए भू (होना) धातु के रूप देखें–

लकार	क्रियापद	अर्थ
लट्	भवति	होता है
लुट्	भविता	होने वाला है
लृट्	भविष्यति	होगा
लङ्	अभवत्	हुआ
लुङ्	अभूत्	हुआ
विधिलिङ्	भवेत्	होना चाहिए
लोट्	भवतु	हो
आशीर्लिङ्	भूयात्	हो
लिट्	बभूव	हुआ
लृङ्	अभविष्यत्	यदि ऐसा होता तो ऐसा होता

कर्ता की कैसी भी क्रियात्मक अभिव्यक्ति का आधार ये तिङ् प्रत्यय ही हैं। यहाँ तक की दो क्रियाओं का एकसाथ प्रयोग भी तिङ् प्रत्ययों से ही सम्भव होता है। जैसे– पिपठिषति (पढ़ने की इच्छा करता है)

इस क्रियापद में 'पढ़ना' और 'इच्छा करना' में दो क्रियाएँ हैं, जिसमें तिप् प्रत्यय के प्रयोग से अभिव्यक्ति की पूर्णता सम्पन्न होती है। इन तिङ् प्रत्ययों से बनने वाले वाच्य तीन प्रकार के होते हैं–

(1) कर्तृवाच्य (2) कर्मवाच्य (3) भाववाच्य

कर्तृवाच्य में सामान्यतः तिङ् प्रत्ययों के आत्मनेपदी एवं परस्मैपदी रूप देखने को मिलते हैं किन्तु कर्मवाच्य एवं भाववाच्य में आत्मनेपद रूप ही देखने को मिलते हैं। संस्कृत में वाक्य रचना उपर्युक्त इन्हीं तीन वाच्यों में होती है।

कर्तृवाच्य में वाक्य रचना

जब वाक्य की क्रिया कर्ता को देखकर चलती है, अर्थात् उसके पुरुष और वचन कर्ता के अनुसार निर्धारित होते हैं, तब ऐसे वाक्य को कर्तृवाच्य का वाक्य कहा जाता है। यथा–

- बालकः ग्रन्थं पठति। (एक बालक ग्रन्थ पढ़ता है।)
- बालकौ ग्रन्थं पठतः। (दो बालक ग्रन्थ पढ़ते हैं।)
- बालकाः ग्रन्थं पठन्ति। (बहुत से बालक ग्रन्थ पढ़ते हैं।)

ध्यातव्य है कि कर्ता 'बालकः' प्रथमपुरुष एकवचन में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष एकवचन में है। कर्ता 'बालकौ' प्रथमपुरुष द्विवचन में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष द्विवचन में है। कर्ता 'बालकाः' प्रथमपुरुष बहुवचन

में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष बहुवचन में है।

इसी प्रकार कर्तृवाच्य के अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं –

- अहं ग्रामं गच्छामि। (मैं गाँव जाता हूँ।)
- त्वं कथां शृणोषि। (तुम कथा सुनते हो।)
- सः असत्यं वदति। (वह असत्य बोलता है।)
- देवदत्तः प्रश्नं पृच्छति। (देवदत्त प्रश्न पूछता है।)
- माता भोजनं ददाति। (माता भोजन देती है।)
- पिता पुत्रं पालयति। (पिता पुत्र को पालता है।)

कर्तृवाच्य के वाक्यों में कर्ता में प्रथमा विभक्ति आती है। कर्म में द्वितीया विभक्ति आती है और क्रिया के पुरुष वचन कर्ता के अनुसार ही निर्धारित होते हैं अर्थात् कर्ता के उत्तमपुरुष होने पर क्रिया भी उत्तमपुरुष में होती है। कर्ता के मध्यमपुरुष होने पर क्रिया भी मध्यमपुरुष में होती है। कर्ता के प्रथमपुरुष होने पर क्रिया भी प्रथमपुरुष में होती है।

कर्मवाच्य में वाक्य रचना

जब वाक्य की क्रिया कर्म को देखकर चलती है अर्थात् उसके पुरुष और वचन कर्म के अनुसार निर्धारित होते हैं, तब ऐसे वाक्य को कर्मवाच्य का वाक्य कहा जाता है। चूँकि कर्मवाच्य की क्रिया कर्म को देखकर ही चलती है अर्थात् कर्म उत्तमपुरुष होने पर क्रिया उत्तमपुरुष में होती है। कर्म मध्यम पुरुष होने पर क्रिया मध्यमपुरुष में होती है। कर्म प्रथमपुरुष होने पर क्रिया प्रथमपुरुष में होती है। कर्मवाच्य और भाववाच्य की क्रिया का कर्ता से कोई सम्बन्ध नहीं होता है इसलिये कर्मवाच्य के वाक्यों के कर्ता में सदा तृतीया विभक्ति ही होती है। यथा–

- बालकेन ग्रन्थः पठ्यते। (बालक के द्वारा ग्रन्थ पढ़ा जाता है।)
- बालकेन ग्रन्थौ पठ्येते। (बालक के द्वारा दो ग्रन्थ पढ़े जाते हैं।)
- बालकेन ग्रन्थाः पठ्यन्ते। (बालक के द्वारा बहुत से ग्रन्थ पढ़े जाते हैं।)

ध्यातव्य है कि कर्म 'ग्रन्थः' प्रथमपुरुष एकवचन में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष एकवचन में है। कर्म 'ग्रन्थौ' प्रथमपुरुष द्विवचन में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष द्विवचन में है। कर्म 'ग्रन्थाः' प्रथमपुरुष बहुवचन में है, तो क्रिया भी प्रथमपुरुष बहुवचन में है। इसी प्रकार कर्मवाच्य के अन्य उदाहरण निम्नलिखित हैं –

- त्वया अहं दृश्ये। (तुम्हारे द्वारा मैं देखी जाती हूँ।)
- त्वं मां पश्यसि। (तुम मुझे देखते हो।)
- त्वं अस्मान् पश्यसि। (तुम हमें देखते हो।)
- त्वया वयं दृश्यामहे। (तुम्हारे द्वारा हम देखे जाते हैं।)
- अहं त्वां पश्यामि। (मैं तुमको देखता हूँ।)
- मया त्वं दृश्यसे। (मेरे द्वारा तुम देखे जाते हो।)
- वयं युष्मान् पश्यामः। (हम तुम सभी को देखते हैं।)

- अस्माभिः यूयं दृश्यध्वे। (हमारे द्वारा तुम सभी देखे जाते हो।)

यहाँ ध्यातव्य है कि कर्म उत्तमपुरुष एकवचन में है, तो क्रिया भी उत्तमपुरुष एकवचन में है। कर्म मध्यमपुरुष एकवचन में है, तो क्रिया भी मध्यमपुरुष एकवचन में है। इस प्रकार कर्मवाच्य के वाक्यों में कर्ता में तृतीया विभक्ति होती है। कर्म में प्रथमा विभक्ति होती है और क्रिया के पुरुष एवं वचन कर्म के अनुसार ही निर्धारित होते हैं।

उपरोक्त उदाहरणों में दृश धातु का प्रयोग किया गया है, जिसका अर्थ 'देखना' है। दृश धातु का प्रयोग परस्मैपद एवं आत्मनेपद में शित् सर्वाधातुक एवं अर्धधातुक विधान के आधार पर भिन्न–भिन्न प्रकार से होता है। इसकी चर्चा पृथक रूप में विस्तार से आगे के अंकों में की जाएगी। यहां शीघ्र–अवबोध के लिए इतना भर आवश्यक है कि शित् सर्वधातुक प्रत्यय (परस्मैपद सर्वधातुक लकार – लट्, लोट्, लङ् विधिलिङ्) के सहयोग से निर्मित दृश धातु से क्रियापद 'पश्यति' आदि की तरह बनते हैं तथा अन्यत्र सभी स्थानों (भाववाची आत्मनेपद –दृश्यते आदि एवं अर्धधातुक – लिट्, लुङ् लृट्, आशीर्लिङ् लृङ्, लुट्) पर क्रियापद 'दृश्यते' आदि की तरह बनते हैं।

भाववाच्य में वाक्य रचना

जब वाक्य में कर्म नहीं होता है अथवा कर्म रहते हुए भी कहा नहीं जाता है, तब क्रिया का निर्धारण कर्म के अनुसार हो भी नहीं सकता। ऐसी स्थिति में कर्ता में तृतीया विभक्ति होती है और कर्म के न होने के कारण क्रिया में पुरुष प्रथम एकवचन ही होता है। ऐसे वाक्यों को भाववाच्य के वाक्य कहते हैं। जैसे–

- देवदत्तेन आस्यते। (देवदत्त द्वारा बैठा जाता है।)
- बालकेन सुप्यते। (बालक द्वारा सोया जाता है।)
- त्वया स्थीयते। (तुम्हारे द्वारा बैठा जाता है।)
- मया जीव्यते। (मेरे द्वारा जीया जाता है।)
- बालकेन रुद्यते। (बालक द्वारा रोया जाता है।)
- मया हस्यते। (मेरे द्वारा हँसा जाता है।)

जब कर्म होते हुए भी उसे कहा नहीं जाता है, तब भी क्रिया को अकर्मक ही मानना चाहिए और इनके प्रयोग में भी क्रिया में पुरुष प्रथम एकवचन ही लगाना चाहिये। यथा–

क्रम सं.	कर्तृवाच्य	कर्मवाच्य/ भाववाच्य
1	देवदत्तः पठति। (देवदत्त पढ़ता है।)	देवदत्तेन पठ्यते। (देवदत्त द्वारा पढ़ा जाता है।)
2	कन्या पश्यति। (कन्या देखती है।)	कन्यया दृश्यते। (कन्या द्वारा देखा जाता है।)
3	बालकः खादति। (बालक खाता है।)	बालकेन खाद्यते। (बालक द्वारा खाया जाता है।)
4	त्वं पिबसि। (तुम पीते हो।)	त्वया पीयते। (तुम्हारे द्वारा पीया जाता है।)

उपर्युक्त तीन वाच्यों में वाक्य रचना हेतु हमें धातु(क्रिया) के स्वभाव को जानना भी आवश्यक है। धातु के सामान्यतः दो प्रकार होते हैं–

(1) सकर्मक धातु (2) अकर्मक धातु

हम जानते हैं कि जो क्रिया को करने वाला है, उसे कर्ता कहते हैं। कर्ता अपनी क्रिया के द्वारा जिसे चाहता है, उसे कर्म कहते हैं। जिन क्रियाओं का कर्म होता है, वे सकर्मक क्रियाएँ होती हैं। जिन क्रियाओं का कर्म नहीं होता, वे अकर्मक क्रियाएँ होती हैं। सकर्मक और अकर्मक क्रियाओं को इस प्रकार पहचानें–

सकर्मक क्रिया– वाक्य में जो भी क्रिया हो, उसमें प्रश्न लगाइये– क्या ? अथवा किसको? उत्तर में जो मिले, उसे ही उस क्रिया का कर्म जानिये। जैसे–

- खाता है। क्या खाता है? रोटी। यही खाना क्रिया का कर्म है।
- धोता है। क्या धोता है? कपड़े। यही धोना क्रिया का कर्म है।
- देता है। क्या देता है? मुद्राएँ। यही देना क्रिया का कर्म है।
- लिखता है। क्या लिखता है? पत्र। यही लिखना क्रिया का कर्म है।

इस प्रकार जब 'क्या' का उत्तर मिल जाये तो जानिये कि वह क्रिया सकर्मक है।

अकर्मक क्रिया– अब अकर्मक क्रिया को देखें जैसे–

- रोता है। क्या रोता है? इसका कोई उत्तर नहीं है।
- सोता है। क्या सोता है? इसका कोई उत्तर नहीं है।
- उठता है। क्या उठता है? इसका कोई उत्तर नहीं है।
- नहाता है। क्या नहाता है? इसका कोई उत्तर नहीं है।

अतः जब 'क्या' का उत्तर न मिले तो जानिये कि वह क्रिया अकर्मक है। सामान्यतः अकर्मक धातु इस प्रकार हैं —

लज्जासत्तास्थितिजागरणं वृद्धिक्षयभयजीवितमरणम्।
शयनक्रीडारुचिदीप्त्यर्थं धातुगणं तमकर्मकमाहुः।।

लज्जते (लज्जा करता है), भवति (होता है), तिष्ठति (बैठता है), जागर्ति (जागता है), वर्धते (बढ़ता है), क्षीयते (क्षीण होता है), बिभेति (डरता है), जीवति (जीता है), म्रियते (मरता है), शेते (सोता है), क्रीडते (खेलता है), रोचते (पसन्द करता है), दीप्यते (प्रकाशित होता है) आदि धातु और इनके समानार्थक सारे धातु अकर्मक होते हैं।

अविवक्षितकर्मक धातु– जब कर्म होते हुए भी उसे कहा नहीं जाता है, तब भी क्रिया को अकर्मक ही मानना चाहिये। जैसे– देवदत्तः पठति। बालः खादति। कन्या पश्यति, आदि क्रियाएँ सकर्मक हैं, किन्तु इन वाक्यों में उनका कर्म कहा नहीं गया, अतः इन्हें अकर्मक ही माना जाना चाहिये और इनके प्रयोग में भी वाक्य रचना वैसे ही करना चाहिये, जैसी अकर्मक धातुओं के प्रयोग में की जाती है।

तिङ् प्रत्ययों के अतिरिक्त अतिङ् (कृत् आदि) प्रत्ययों की व्यवस्था भी संस्कृत व्याकरण में देखने को मिलती है। यद्यपि वाक्य रचना में सामान्यतः क्रियापद के रूप में तिङन्त पद ही प्रयुक्त होते हैं, फिर भी तिङ् प्रत्ययों से भिन्न अतिङ् (कृत्) प्रत्यय भी क्रियापद के रूप में प्रयुक्त होते हैं। जैसे– यत्, क्यप्, ण्यत्, तव्यत्, अनीयर् क्त एवं क्तवतु आदि। इनमें से क्त एवं क्तवतु प्रत्यय भूतकालिक क्रिया का बोध कराने में प्रयुक्त होते

हैं। दोनों में एक ही भेद है कि 'क्त' प्रत्यय का प्रयोग कर्मवाच्य एवं भाववाच्य के रूप में किया जाता है। जबकि 'क्तवतु' प्रत्यय का प्रयोग कर्तृवाच्य में किया जाता है। जैसे–

मया पुस्तकं पठितम्। (मेरे द्वारा पुस्तक पढ़ी गयी।)

यह कर्मवाच्य का वाक्य है। इसमें क्रियापद 'पठितम्' है। पठितम् का प्रयोग कर्म (पुस्तकं) के अनुसार किया गया है। इस वाक्य में क्रियापद कर्म के अनुसार है। कर्ता यहाँ अनुक्त है। इसलिए इसमें तृतीया विभक्ति का प्रयोग किया गया है। इसीप्रकार क्तवतु प्रत्यय कर्तृवाच्य में प्रयुक्त होता है। जैसे–

सः पुस्तकं पठितवान्। (उसने पुस्तक पढ़ी।)

इस वाक्य में कर्ता प्रधान (उक्त) है, अतः क्रिया (पठितवान्) का प्रयोग सः (कर्ता) के अनुसार किया गया है। इस वाक्य में 'पुस्तकं' कर्म है। कर्तृवाच्य में कर्म अनुक्त (अप्रधान) होता है।

क्त और क्तवतु के अतिरिक्त शतृ और शानच् भी लट् लकार के स्थान पर प्रयुक्त होते हैं। जैसे–

सः विकसत् पुष्पं पश्यति। (वह खिलते हुए पुष्प को देखता है।)

इस वाक्य में वि+कस्+शतृ प्रत्यय का प्रयोग है।

शतृ और शानच् प्रत्यय कर्म आदि के विशेषण के रूप में प्रयुक्त होते हैं।

इस प्रकार क्रियापद के रूप में तिङ् के अतिरिक्त कृत प्रत्ययों का भी प्रयोग होता है। कृत प्रत्ययों का प्रयोग क्रियापद के अतिरिक्त कर्ता, करण, संज्ञा, भाव, विशेषणवाची शब्दों की निर्मिति में भी होता है, जिनके उदाहरण इस प्रकार हैं–

क्रम संख्या	शब्द	प्रत्यय	अर्थ	पद
1	पातव्यम्	तव्य	पीने योग्य	क्रिया
2	जयनीयः	अनीयर्	जीतने योग्य	क्रिया
3	गेयम्	यत्	गाने योग्य	क्रिया
4	स्तुत्यः	क्यप्	स्तुति योग्य	क्रिया
5	पाव्यः	ण्यत्	पवित्र करने लायक	क्रिया
6	धावितः	क्त	दौड़ा	क्रिया
7	लिखितवान् / लिखितवती	क्तवतु	लिखा	क्रिया
8	उक्तः	क्त	कहा	क्रिया
9	चोरयमाणः	शानच्	चुराता हुआ	विशेषण
10	क्रीडन्	शतृ	खेलता हुआ	विशेषण
11	भवनम्	ल्युट्	होना	संज्ञा
12	कारकः	ण्वुल	करने वाला	संज्ञा / विशेषण
13	दाता / दात्री	तृच्	देने वाला / देने वाली	संज्ञा
14	ज्ञातुम्	तुमुन्	जानने के लिए	क्रिया(अव्यय)

15	त्यक्त्वा	क्त्वा	त्यागकर	क्रिया(अव्यय)
16	विलोक्य	ल्यप्	देखकर	क्रिया(अव्यय)
17	योगः	घञ्	योग	संज्ञा
18	जनता	तल्	जनता	संज्ञा
19	शक्तिमान्	मतुप्	शक्ति से युक्त	विशेषण (पुल्लिंग)
20	धृतिमती	मतुप्	धैर्य से युक्त	विशेषण(स्त्रीलिंग)

धातु के साथ लगने वाले प्रत्ययों में सनादि प्रत्यय भी होते हैं जिनका प्रयोग क्रिया के मूल भाव के अतिरिक्त अन्य अर्थ के बोधन में भी किया जाता है।

जैसे– णिच् प्रत्यय। इसका प्रयोग प्रेरणार्थक क्रियाओं में किया जाता है। उदाहरणार्थ–सः पुस्तकं पाठयति। (वह पुस्तक पढ़ाता है।)

इस वाक्य में पाठयति पद णिच् प्रत्यय से बना है। इसके कारण 'पठ्' धातु का मूल अर्थ पढ़ना 'पढ़ाने' में परिवर्तित हो गया है, जो प्रेरणार्थक है। इसका तात्पर्य है– वह पुस्तक पढ़ाता है अर्थात् वह पुस्तक पढ़ने के लिए प्रेरित करता है।

इस प्रकार प्रस्तुत लेख में धातु के साथ लगने वाले प्रत्ययों के स्वरूप एवं प्रयोग पर विचार किया गया है। इसी प्रकार आगामी लेख में तद्धित एवं स्त्री प्रत्ययों के स्वरूप एवं प्रयोग पर विचार किया जाएगा।

अनुवाद

1. पाचकः ओदनं पचति/पचते। (पाचक भात पकाता है।)
2. श्रीमान् राजकिशोरः पुस्तकं पठति। (श्रीमान् राजकिशोर पुस्तक पढ़ते हैं।)
3. राधा संस्कृतव्याकरणं पिपठिषति। (राधा संस्कृत व्याकरण पढ़ने की इच्छा करती है।)
4. एतत् वस्त्रं धातव्यम् अस्ति। (यह वस्त्र धारण करने योग्य है।)
5. राष्ट्रीयसंग्रहालये दर्शनीया प्रदर्शनी आसीत्। (राष्ट्रीय संग्रहालय में देखने योग्य प्रदर्शनी थी।)
6. वयं छात्राः नव्यं वस्तुं जिज्ञासितुं सदा तत्पराः तिष्ठामः। (हम छात्र नई वस्तु जानने हेतु तत्पर रहते हैं।)
7. यानि कार्याणि कर्तुम् अहम् अदां तानि शीघ्रं साधय। (जो कार्य मैंने करने को दिए हैं, उन्हें शीघ्र करो।)
8. भवान् किं भवितुं वाञ्छति? (आप क्या बनना चाहते हैं?)
9. मया एतानि पुस्तकानि कस्मै देयानि? (मेरे द्वारा ये पुस्तकें किसे देनी हैं?)
10. महर्षिदयानन्दः सर्वाणि शास्त्राणि पठितवान्। (महर्षि दयानन्द ने सारे शास्त्र पढ़े।)
11. गृहाणि गच्छन्तीः बालिकाः प्रतिभा अकथयत्। (घर जाती हुई लड़कियों ने प्रतिभा से कहा।)
12. मम मित्राणि चित्तौड़दुर्गं न दृष्टवन्तः। (मेरे मित्रों ने चित्तौड़ का किला नहीं देखा।)
13. माता युष्मान् किं पृष्टवती? (माता ने तुमसे क्या पूछा?)
14. तस्मै मम वार्ताः रुचिताः । (उसे मेरी बातें अच्छी लगी।)
15. वयं कष्टानि सहितुं/सोढुं सज्जाः स्मः परं नष्टुं कदापि नैव। (हम कष्ट सहने को तैयार हैं, पर नष्ट होने को कभी नहीं।)

Anecdots From The History Of Modern Computing

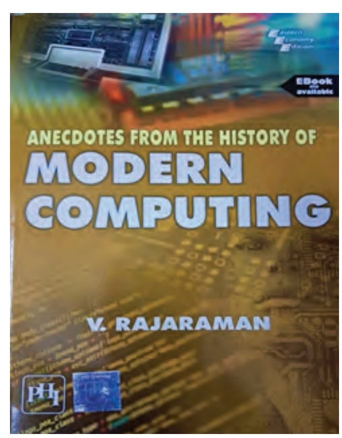
— V. Rajaraman

प्रस्तुत पुस्तक 72 कथाओं की शृंखला के माध्यम से आधुनिक कम्प्यूटिंग के इतिहास का स्मृति रूप है। आधुनिक कम्प्यूटिंग का आरम्भ पेन्सिलवेनिया विश्वविद्यालय के इंजीनियरों द्वारा वर्ष 1946 में आधुनिक संगृहीत प्रोग्राम कम्प्यूटर ENIAC के निर्माण से होता है एवं परिसमाप्ति चैटजीपीटी (Chat GPT), जेमिनी और अन्य बड़े भाषा मॉडल–आधारित जनरेटिव एआई (AI) सहायकों की कथाओं से होती है, जो वर्ष 2023 में प्रकाश में आए हैं। यह आर्टिफिशियल इंटेलिजेंस पूछे गए प्रश्नों के उसी भाषा में सहजता से उत्तर देने से लेकर निबन्ध, कविता और कम्प्यूटर प्रोग्राम की रचना करने में भी समर्थ है। इस पुस्तक में 1200 से 2500 शब्दों के मध्य लिखित लघु कथाओं का संकलन है। प्रत्येक कथा आधुनिक कम्प्यूटिंग के विकास से सम्बन्धित किसी महत्त्वपूर्ण आविष्कार तथा इस क्षेत्र के नवाचारी व्यक्तियों से सम्बद्ध पक्षों का उद्घाटन भी करती है। इन कथाओं के माध्यम से कम्प्यूटर हार्डवेयर, सॉफ्टवेयर, एप्लिकेशन, कम्प्यूटर सञ्चार और कृत्रिम बुद्धिमत्ता के इतिहास को प्रतिपादित करने का प्रयास किया गया है।

ये कथाएँ भारत में कम्प्यूटर–विज्ञान की शिक्षा और अनुसन्धान के क्षेत्र में अग्रणी प्रोफेसर वी. राजारमन द्वारा संकलित की गई हैं, जिन्होंने वर्ष 1955 में कम्प्यूटर एवं तद्विषयक क्षेत्र में प्रवेश किया था। इस पुस्तक में वर्णित अधिकांश कथाएँ उनकी अनुभव–स्मृतियाँ हैं। प्रत्येक कथा अपने आप में सम्पूर्ण है और पाठक अपनी रुचि के अनुसार कोई भी अंश पढ़ सकते हैं। पुस्तक की भाषा सरल है, अर्थात् इसमें किसी भी शब्दजाल का प्रयोग नहीं किया गया है। विद्यालय में माध्यमिक शिक्षा प्राप्त कोई भी व्यक्ति इस पुस्तक के प्रतिपाद्य को सरल एवं सहज रूप में समझ सकता है।

प्रमुख विशेषताएँ

- यह ग्रन्थ आधुनिक कम्प्यूटिंग के इतिहास को 72 कहानियों की शृंखला के रूप में प्रस्तुत करता है।
- प्रत्येक कहानी कम्प्यूटिंग के इतिहास में एक महत्त्वपूर्ण घटना पर आधारित है।
- प्रत्येक कथा में किसी महत्त्वपूर्ण आविष्कार और आविष्कार. कों का वर्णन किया गया है।
- प्रत्येक कथा अपने आप में सम्पूर्ण है और इसे किसी भी क्रम में पढ़ा जा सकता है।
- यह पुस्तक माध्यमिक शिक्षा प्राप्त सामान्य पाठक के लिए उपयुक्त है।



पुस्तक के लेखक वी. राजारमन, पीएच.डी. (विस्कॉन्सिन), इन्डियन इन्स्टीच्यूट आफ साइन्स, बैंगलोर के सुपरकम्प्यूटर शिक्षा एवं अनुसन्धान केन्द्र में एमेरिटस प्रोफेसर के रूप में कार्यरत हैं। इससे पूर्व, प्रो. राजारमन आईआईटी, कानपुर में कम्प्यूटर विज्ञान और इलेक्ट्रिकल इंजीनियरिंग के प्रोफेसर (1963–1982), इन्डियन इन्स्टीच्यूट आफ साइन्स, बैंगलोर में कम्प्यूटर विज्ञान के प्रोफेसर और सुपरकम्प्यूटर शिक्षा एवं अनुसन्धान केन्द्र के अध्यक्ष (1982–1994), और जवाहरलाल नेहरू उन्नत वैज्ञानिक अनुसन्धान केन्द्र में आईबीएम सूचना प्रौद्योगिकी के प्रोफेसर (1994–2001) के रूप में कार्य कर चुके हैं। वे वर्ष 1998 में पद्मभूषण पुरस्कार से, 1976 में शान्ति स्वरूप भटनागर पुरस्कार, यूजीसी द्वारा होमी भाभा पुरस्कार, ओम प्रकाश भसीन पुरस्कार, कम्प्यूटर इंजीनियरिंग शिक्षण में उत्कृष्टता के लिए आईएसटीई पुरस्कार, रुस्तम चोकसी पुरस्कार, भारतीय राष्ट्रीय विज्ञान अकादमी द्वारा जहीर पदक से सम्मानित हैं। उन्होंने आईआईटी, कानपुर और इण्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ इंजीनियरिंग साइंस एण्ड टेक्नोलॉजी, सिबपुर से डीएससी (एच.सी.) की डिग्री प्राप्त की है। वे इण्डियन एकेडमी ऑफ साइंसेज, इण्डियन नेशनल साइंस एकेडमी, नेशनल एकेडमी ऑफ साइंसेज, इण्डियन नेशनल एकेडमी ऑफ इंजीनियरिंग और कम्प्यूटर सोसाइटी ऑफ इण्डिया के फेलो भी हैं। अनेक सुप्रतिष्ठित और अत्यधिक सफल कम्प्यूटर सम्बन्धी पुस्तकों के लेखक, प्रो. राजारमन के प्रतिष्ठित राष्ट्रीय और अन्तर्राष्ट्रीय पत्रिकाओं में अनेक शोधपत्र प्रकाशित हुए हैं।

आईएसबीएनः 978–81–39364–43–5

विज्ञान प्रकाश पत्रिका में पूर्व में प्रकाशित मेरे शोध आलेखों की त्वरित समीक्षा प्रक्रिया तथा AICTE द्वारा उक्त पत्रिका को संदर्भित करते हुए इसके माध्यम से हिन्दी भाषा में शोध पत्रों के प्रकाशन को प्रोत्साहित किए जाने से मैंने यह शोध पत्र पुनः इस पत्रिका में प्रकाशन हेतु भेजा । पत्रिका के संपादक मंडल की सराहनीय भूमिका तथा समीक्षकों के गुणवत्तापूर्ण सुझावों का ही परिणाम है कि मेरा शोध पत्र 'विज्ञान प्रकाश' के इस अंक में वर्तमान स्वरुप में आपके समक्ष प्रस्तुत है । हिन्दी भाषा में अपने शोध पत्रों के प्रकाशन की योजना बना रहे शोधार्थियों के लिए निस्संदेह 'विज्ञान प्रकाश' एक श्रेष्ठ विकल्प है ।

– Dr. S.S.L. Patel, Government Polytechnic Korba, Chhattisgarh,
sslpatel@gmail.com

विश्वविद्यालय अनुदान आयोग द्वारा अनुमोदित यूजीसी केयर सूची में नामांकित शोध पत्रिका विज्ञान प्रकाश में शोध पत्र के संभावित प्रकाशन के लिए प्रेषित किये जाने से लेकर शोध पत्र के प्रकाशित किये जाने तक की यात्रा अत्यंत रोचक रही। प्रस्तुत शोध पत्र की सुधि समीक्षकों से गहन समीक्षा करवाई गई। न्यूनतम संभव समय में पूर्ण गुणवत्ता के साथ शोध पत्र के प्रकाशन के लिए समीक्षा समन्वयक का सहयोग सराहनीय है ।

– Dr. Anil Maheshwari, Engineering College Ajmer, Rajasthan,
anil.knowledge@gmail.com

विज्ञान प्रकाश पत्रिका में विज्ञान एवं तकनीकी विषयों में प्रकाशित किये जाने वाले शोध पत्रों की समीक्षा इस प्रकार की जाती है कि शोध पत्र की गुणवत्ता में सुधार भी हो तथा प्रकाशन निर्बाध एवं द्रुत गति से हो सके। विषयक ज्ञान एवं शुद्ध भाषा प्रवाह विज्ञान प्रकाश को उच्च श्रेणी में कोटिबद्ध करते हैं । विज्ञान प्रकाश का सम्पादक मंडल साधुवाद का पात्र है ।

– Dr. Manoranjan Kumar Singh, Magadh University Bodh-Gaya, Bihar,
drmksingh_gaya@yahoo.com

वैज्ञानिक अनुसंधान और विद्वत्तापूर्ण संचार को हिंदी भाषा में बढ़ावा देने की प्रतिबद्धता के लिए विज्ञान प्रकाश को साधुवाद । विज्ञान प्रकाश पत्रिका द्वारा वृहत् एवं त्वरित समीक्षा प्रक्रिया के माध्यम से शोध आलेखों की गुणवत्ता को जाना । न्यूनतम संभव समय में शोध आलेख का प्रकाशन सुनिश्चित किया जाना इस पत्रिका की प्रमुख विशेषता लगी ।

– Dr. Kirti Verma, Gyan Ganga Institute of Technology and Sciences,
Jabalpur, Madhya Pradesh, vermakirti18@gmail.com

Vision: High-Tech research to reach out widely promoting inclusive innovation and entrepreneurship

Mission: Publication of quality research articles in Hindi in Sciences (Physics, Chemistry, Mathematics, Bio-science, Medical Science, AYUSH, Management Science, Agriculture and Environment), Engineering and Technology, and promoting creative ideas for innovation, incubation and entrepreneurship.

Submission: Title, author affiliation, abstract and keywords be in both Hindi and English, and references as they are originally referred to. Overview articles and research papers must be **original without plagiarism**. Authors need to mention three or more subject experts also from different institutions to review the submitted article. Articles may be submitted to Editor@VigyanPrakash.in

List of Review Coordinators (Excellently coordinated with reviewers for critical review.)

- **Prof. Avnish Kumar**
  Dept of Math Sc & Comp App
  Bundelkhand University, Jhansi
  dravanishkumar@gmail.com

- **Dr Adarsh Mangal**
  Department of Mathematics
  Engineering College Ajmer
  dradarshmangal@vigyanpralkash.in

भाषा सुधार (Language Comprehension)

- **Dr Adarsh Mangal**
  Department of Mathematics
  Engineering College Ajmer
  dradarshmangal@vigyanprakash.in

- - - List of Reviewers - - -

- **Dr Sudipta Gayen**
  Department of Mathematics
  Centre for Data Science,
  Faculty of Engineering & Technology,
  Siksha 'O' Anusandhan (Deemed to be University)
  Odisha
  sudi23dipta@gmail.com

- **Dr. I. C. Bharti**
  Principal, Government Polytechnic, Bhatapara
  icb567@rediffmail.com

- **Dr V. C. Jain**
  Department of Mathematics
  Engineering College Ajmer
  vcjeca@ecajmer.ac.in

- **Dr. S. S. K. Deepak**
  Department of Mechanical Engineering
  Bhilai Institute of Technology, Raipur
  drsskdeepak.bit@gmail.com

- **Prof. Harish Nagar**
  Department of Mathematics
  Chandigarh University, Punjab
  drharishngr@gmail.com

- **Dr R. P. Sharma**
  Department of Mathematics
  Engineering College Ajmer
  drrpsharma@ecajmer.ac.in

- **Dr. Mukesh S. Desai**
  Department of Mechanical Engineering
  OP Jindal University, Raigarh
  mukesh.desai@opju.ac.in

- **Prof. Arif M. Khan**
  Dean, Science & Humanities
  Jodhpur Institute of Engineering & Technology
  JIET Universe, Jodhpur
  arif.khan@jietjodhpur.ac.in

- **Dr Shalini Agrawal**
  Department of Mathematics
  Government Women Engineering College Ajmer
  shaliniagarwal@gweca.ac.in

- **Dr Gajendra Pratap Singh**
  Department of Mathematics
  School of Computational and Integrative Sciences
  Jawaharlal Nehru University
  New Delhi
  gajendra@mail.jnu.ac.in

- **Dr Vijay Sharma**
  Department of Physics
  Government Women Engineering College Ajmer
  vijaysharma@gweca.ac.in

श्रीलक्ष्मणाचार्य की संस्कृत रचना नामरामायण से...

॥ बालकाण्डः ॥

शुद्धब्रह्मपरात्पर राम ॥ कालात्मकपरमेश्वर राम ॥
शेषतल्पसुखनिद्रित राम ॥ ब्रह्माद्यमरप्रार्थित राम ॥
चण्डकिरणकुलमण्डन राम ॥ श्रीमद्दशरथनन्दन राम ॥
कौसल्यासुखवर्धन राम ॥ विश्वामित्रप्रियधन राम ॥
घोरताटकाघातक राम ॥ मारीचादिनिपातक राम ॥
कौशिकमखसंरक्षक राम ॥ श्रीमदहल्योद्धारक राम ॥
गौतममुनिसम्पूजित राम ॥ सुरमुनिवरगणसंस्तुत राम ॥
नाविकधावितमृदुपद राम ॥ मिथिलापुरजनमोहक राम ॥
विदेहमानसरञ्जक राम ॥ त्र्यम्बककार्मुकभञ्जक राम ॥
सीतार्पितवरमालिक राम ॥ कृतवैवाहिककौतुक राम ॥
भार्गवदर्पविनाशक राम ॥ श्रीमदयोध्यापालक राम ॥
राम राम जय राजा राम। राम राम जय सीता राम ॥

॥ अयोध्याकाण्डः ॥

अगणितगुणगणभूषित राम ॥ अवनीतनयाकामित राम ॥
राकाचन्द्रसमानन राम ॥ पितृवाक्याश्रितकानन राम ॥
प्रियगुहविनिवेदितपद राम ॥ तत्क्षालितनिजमृदुपद राम ॥
भरद्वाजमुखानन्दक राम ॥ चित्रकूटाद्रिनिकेतन राम ॥
दशरथसन्ततचिन्तित राम ॥ कैकेयीतनयार्थित राम ॥
विरचितनिजपितृकर्मक राम ॥ भरतार्पितनिजपादुक राम ॥
राम राम जय राजा राम । राम राम जय सीता राम ॥

क्रमशः...

नामरामायण संस्कृत में ऋषि वाल्मीकि द्वारा विरचित महाकाव्य रामायण का लघु संस्करण है। इसके रचयिता श्रीलक्ष्मणाचार्य हैं। नामरामायण में वाल्मीकिरामायण के ही समान बाल, अयोध्या, किष्किन्धा, सुंदर, युद्ध और उत्तर काण्ड हैं। उपर्युक्त सात काण्डों में वर्गीकृत इस ग्रंथ में भगवान् राम के संपूर्ण जीवनचरित्र को 108 नामों के माध्यम से चित्रित किया गया है। नामरामायण दक्षिण भारतीय राज्यों अर्थात् तमिलनाडु, आंध्र प्रदेश, तेलंगाना, कर्नाटक और केरल में अधिक लोकप्रिय है। प्रस्तुत अंक में नामरामायण के बालकाण्ड एवं अयोध्याकाण्ड उद्धृत हैं।