शोध पत्र / Research Paper

आवेश के प्रेरण व चर घनत्व द्वारा गोलाकार रूप से सममित पिंड के गुरुत्वीय निपात की रोकथाम

Halting of Gravitational Collapse for a Spherically Symmetric Object by Induction of Charge and Variable Density

अनिल माहेश्वरी[1] एवं एम. के. गोखरू[2]
Anil Maheshwari[1] and M. K. Gokhroo[2]
[1]Engineering College Ajmer-305001, INDIA
[2]Retired Principal, Government College Ahore-307029, INDIA
[1]anil.knowledge@gmail.com, [2]drgokhroomk@gmail.com
https://doie.org/10.0121/VP.2025129594

सारांश

गोलाकार रूप से सममित, आवेशित व चर घनत्व वाले पूर्ण द्रव हेतु आइंस्टीन–मैक्सवेल समीकरणों का एक आंतरिक हल यहाँ प्रस्तुत किया गया है। t = स्थिरांक लेने पर इस हल का भौतिक 3 – स्थान गोलाकार है। गुरुत्वीय निपात के मानक ओपेनहाइमर – स्नाइडर निदर्श व गुरुत्वीय निपात की रोकथाम के संदर्भ में दिये गए माहेश्वरी – गोखरू निदर्श, दोनों का सामान्यीकरण प्राप्त करने हेतु एक सन्निकटन प्रक्रिया का उपयोग किया गया है जो दर्शाती है कि बड़े एवं साथ ही छोटे आवेशित पिंडों में अचर घनत्व के स्थान पर चर घनत्व मानने पर इनके गुरुत्वीय निपात की अधिक प्रभावी रोकथाम की जा सकती है।

Abstract

An interior solution for spherically symmetric perfect fluid with charge and variable density of Einstein - Maxwell equations is presented here. Considering t = constant, the physical 3 - space of this solution is spheroidal. An approximation procedure is used to get a generalization of the standard Oppenheimer - Snyder model of collapse and Maheshwari - Gokhroo model of halting of collapse, which represents that collapse of large as well as small objects with charge can be halted more efficiently by considering variable density instead of constant density.

मुख्य शब्द : गुरुत्वीय निपात, आवेश, चर घनत्व, दबाव, द्रव्यमान।

Keywords : Gravitational Collapse, Charge, Variable Density, Pressure, Mass.

परिचय

ब्रहमांड विज्ञान की सबसे महत्वपूर्ण समस्याओं में से एक के रूप में, गुरुत्वीय निपात के कई रोचक खगोलभौतिकी अनुप्रयोग है, जिनमें सामान्य सापेक्षता एक सार्थक भूमिका निभाती है। गुरुत्वीय निपात की समस्या में तारे की सतह सम्पूर्ण दिक् एवं काल को दो भिन्न – भिन्न क्षेत्रों में विभाजित करती है। उचित दृष्टि के साथ कई तारों के अस्तित्व के तथ्य के रूप में, गुरुत्वीय निपात को रोकने की संभावना के बारे में जानना हमेशा महत्वपूर्ण होता है।

ओपेनहाइमर और स्नाइडर [1] ने स्थिर श्वार्जस्चाइल्ड बाह्य भाग के साथ धूल के गोलीय पिंड के गुरुत्वीय निपात के बारे में प्रारम्भिक चर्चा की। उसके बाद गुरुत्वीय निपात व उसके रोकथाम के अध्ययन पर काफी ध्यान दिया गया। मिसनर [2] ने सरलीकृत ताप स्थानांतरण प्रक्रिया को दर्शाते हुए गोलाकार

गुरुत्वीय निपात के मूलभूत समीकरण प्राप्त किए। कुचर [3] ने गुरुत्वीय निपात को आवेश के साथ सहसंबंध किया है। ओकांनेल [4] ने क्वांटम गुरूत्वाकर्षण बलों द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है। माहेश्वरी और गोखरू [5], [6], [7], [8], [9] ने दबाव घनत्व जनित भिन्न–भिन्न परिस्थितियों में विभिन्न दूरिक से संबंधित गुरुत्वीय निपात, विचित्रताओं एवं कृष्ण छिद्र का विस्तृत अध्ययन किया है। माहेश्वरी और गोखरू [10] ने अचर घनत्व के साथ आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है।

वर्तमान शोध पत्र में पूर्ण द्रव, आवेश और चर घनत्व से भरे हुए बड़े व साथ ही छोटे गोलाकार सममित पिंडों के गुरुत्वीय निपात को रोकने की संभावनाओं पर चर्चा की गई है। यहाँ घनत्व की भिन्नता को यादृच्छिक रूप से $\rho = \rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ लिया गया है, जहाँ गोलाकार पिंड के केंद्र पर घनत्व है और उसके बाद जैसे – जैसे हम गोलाकार पिंड की सीमा की ओर बढते हैं, घनत्व कम होता जाता है।

आंतरिक दिक् एवं काल

वैद्या और टिकेकर [11] ने दर्शाया है कि दूरीक

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - \left(\frac{1-kr^2/R^2}{1-r^2/R^2}\right)dr^2 - r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2) \qquad \text{..... (1)}$$

लगभग 3.5 $M\odot$ के कुल द्रव्यमान के साथ एक अति सघन तारे के आन्तरिक भाग का प्रतिनिधित्व कर सकती है।

यदि द्रव्यमान इससे अधिक होता है, तो संतुलन संभव नहीं होने की वजह से गुरुत्वीय निपात होने की प्रबल सम्भावना होगी।

उपरोक्त दूरीक (1) में कुछ परिवर्तन करने पर वैद्य और पटेल [12] ने दूरीक

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[\left(\frac{1-kr^2}{1-r^2}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\phi^2)\right] \qquad \text{..... (2)}$$

प्राप्त की, जो गोलाकार रूप से सममित दिक् एवं काल को दर्शाता है जिसमें $k = 1-\frac{b^2}{R^2}$ एक अचर है, जहाँ b और R गोलाकार 3–स्पेस $dt=0$ के समीकरण $\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}+\frac{w^2}{b^2}=1$ में t के फलन हैं।

उपरोक्त दूरीक (2) ओपेनहाइमर – स्नाइडर दूरीक का एक स्पष्ट सामान्यीकरण है।

क्षेत्र समीकरणों का समाधान

निर्देशांक $x^1 = r,\ x^2 = \theta,\ x^3 = \varphi,\ x^4 = t$ को मानकर, आइन्स्टीन – मैक्सवेल समीकरणों $R^i_j - \frac{1}{2}\delta^i_j R = G^i_j = -8\pi T^i_j$ को दूरीक (2) के लिए निम्न प्रकार हल किया गया है:

$$G_1^1 = -\frac{1-k}{R^2(1-kr^2)} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_1^1, \quad \text{..... (3)}$$

$$G_2^2 = G_3^3 = -\frac{1-k}{R^2(1-kr^2)^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_2^2 = -8\pi T_3^3 \quad \text{..... (4)}$$

व $$G_4^4 = -\frac{2(1-k)}{R^2(1-kr^2)^2} - \frac{1-k}{R^2(1-kr^2)} - 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -8\pi T_4^4, \quad \text{..... (5)}$$

जहाँ एक उपरी बिंदु अर्थात '.' का चिन्ह '*t*' के सापेक्ष अवकलन को इंगित करता है।

हम मानते हैं कि अन्तरिक्ष समय की भौतिक सामग्री पूर्ण द्रव और आवेश का मिश्रण है। ऐसे वितरण हेतु T_j^i निम्न प्रकार दिया गया है:

$$T_j^i = M_j^i + E_j^i, \quad \text{..... (6)}$$

जहाँ M_j^i निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

$$M_j^i = (p+\rho)v^i v_j - p\delta_j^i, \quad \text{..... (7)}$$

जिसमें $$v^i v_j = \begin{cases} 1\ ;\ i=j=4 \\ 0\ ;\ i,j \neq 4 \end{cases} \quad \text{..... (8)}$$

लिया गया है।

अतः $$M_1^1 = M_2^2 = M_3^3 = -p, M_4^4 = \rho = \rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{..... (9)}$$

तथा E_j^i निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

$$E_j^i = -F_{jk}F^{ik} + \frac{1}{4}\delta_j^i F_{UV}F^{UV} \quad \text{..... (10)}$$

गोलाकार सममितता के कारण क्षेत्र प्रदिश F^{ij} के अलुप्त घटकों के रूप में सिर्फ $F^{14} = -F^{14}$ हैं। यह दर्शाता है कि E_j^i के अशून्य घटक निम्न प्रकार हैं:

$$E_1^1 = E_4^4 = -E_2^2 = -E_3^3 = -\frac{1}{2}g^{11}g^{44}(F_{14})^2, \quad \text{..... (11)}$$

जहाँ टोलमन [13] द्वारा निम्न प्रकार दिया गया है:

$$\frac{d}{dr}\left[-g^{11}g^{44}F_{14}(-g)^{1/2}\right] = J^4(-g)^{1/2}, \quad \text{..... (12)}$$

जिसमें $J^4 = \frac{\sigma}{R}\sqrt{\frac{1-r^2}{1-k^2}}$ ..... (13)

लिया गया है।

J^4 का मान समीकरण (12) में प्रतिस्थापित करने पर F_{14} का निम्न मान प्राप्त होता है:

$$F_{14} = \frac{\sigma rR}{3}\sqrt{\frac{1-kr^2}{1-r^2}} \quad \text{..... (14)}$$

अतः समीकरण (11) से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है:

$$E_1^1 = E_4^4 = -E_2^2 = -E_3^3 = \frac{\sigma^2 r^2}{18}, \quad \text{..... (15)}$$

जहाँ σ आवेश का घनत्व है।

समीकरणों (6), (9) व (15) के संयोजन से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$T_1^1 = -p + \frac{\sigma^2 r^2}{18}, T_2^2 = T_3^3 = -p - \frac{\sigma^2 r^2}{18}, T_4^4 = \rho_C\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{\sigma^2 r^2}{18} \quad \text{..... (16)}$$

समीकरण (16) को समीकरणों (3), (4) व (5) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$G_1^1 = 8\pi\, p - \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9}, \quad \text{..... (17)}$$

$$G_2^2 = G_3^3 = 8\pi\, p + \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9} \quad \text{..... (18)}$$

व $G_4^4 = -8\pi\rho_C\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) - \frac{4\pi\sigma^2 r^2}{9}$ ..... (19)

साथ ही, समीकरण (16) से हमें $T_1^1 - T_2^2 = \frac{\sigma^2 r^2}{9} > 0$ प्राप्त होता है अर्थात् $G_2^2 - G_1^1 > 0$

इस प्रकार, समीकरणों (3) व (4) का उपयोग करके $-k(1-k) > 0$ प्राप्त होता है, जो तभी संभव है, जब $k < 0$ अथवा $k > 1$ हो।

परन्तु, $k = 1 - \frac{b^2}{R^2}$ के फलस्वरूप K>1 संभव नहीं है। अतः उपरोक्त से K<0 प्राप्त होता है।

समीकरणों (3), (4) व (5) को समीकरणों (17), (18) व (19) के साथ संयोजित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$8\pi\, p = -\frac{(1-k)(2-kr^2)}{2R^2(1-kr^2)^2} - 2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2}, \quad \text{..... (20)}$$

$$8\pi\rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{(1-k)(6-kr^2)}{2R^2(1-kr^2)^2}+3\frac{\dot{R}^2}{R^2} \quad \text{..... (21)}$$

व $$8\pi\sigma^2=-\frac{9k(1-k)}{R^2(1-kr^2)^2} \quad \text{..... (22)}$$

$k < 0$ के लिए, समीकरणों (21) व (22) से हमें $\rho_C > 0$ व $\sigma^2 > 0$ प्राप्त होता है।

साथ ही, समीकरण (20) से यह देखा जा सकता है कि

$$8\pi\, p' = \frac{k(k-1)r(3-2kr^2)}{R^2(1-kr^2)^3} > 0 \text{ , जब } k < 0 \quad \text{..... (23)}$$

अर्थात दाब p मूल बिंदु से सीमा तक बढता है।

यहाँ व इसके पश्चात् ' ' ' का चिन्ह ' r ' के सापेक्ष अवकलन को इंगित करता है।

साथ ही, $r = 0$ यदि हो, तो $8\pi\, p' = 0$, अर्थात केंद्र पर दाब अचर तथा न्यूनतम है व केंद्र से दूर जाने पर यह बढता जाता है। अतः इस परिदृश्य में गुरुत्वीय निपात की परिकल्पना नहीं की जा सकती है।

समीकरण (22) $k = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर $\sigma = 0$ प्राप्त होता है व उपरोक्त हल ओपेनहाइमर – स्नाइडर हल में परिवर्तित हो जाता है।

साथ ही, समीकरणों (20), (21) व (22) में $\boldsymbol{R}$ को अचर लेने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$\frac{\sigma}{p}=\frac{6\sqrt{8\pi}R(1-kr^2)}{(2-kr^2)}\sqrt{\frac{k}{k-1}}$, जिसका अस्तित्व $k \in (-\infty, 0)$ लेने पर है ..... (24)

व $$\sigma+\rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{3\sqrt{k(k-1)}}{\sqrt{8\pi}R(1-kr^2)}+\frac{(1-k)(6-kr^2)}{16\pi R^2(1-kr^2)^2} \quad \text{..... (25)}$$

समीकरण (24) में $R >> r$ लेने पर हमें $\sigma >> p$ के रूप में एक महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है। यह दर्शाता है कि जैसे – जैसे पिंड बड़ा होता जा रहा है, दाब को रोकने हेतु आवेश की शक्ति भी तेजी से बढ रही है। अतः आवेश का विद्यमान होना बड़े पिंडों के गुरुत्वीय निपात को रोकने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। परन्तु, छोटे पिंडों हेतु यही कथन निश्चितता के साथ नहीं कहा जा सकता। इसलिए, विशेष रूप से छोटे पिंडों हेतु चर घनत्व की भूमिका जानना बहुत महत्वपूर्ण हो जाता है।

साथ ही, समीकरण (24) में , $r = 0$ प्रतिस्थापित करने पर हमें $\frac{\sigma}{p} > 0$ प्राप्त होता है। अर्थात केंद्र पर दाब धनात्मक है।

समीकरणों (21), (24) व (25) में , $R = 1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं:

$$8\pi\rho_C\left(1-r^2\right)=\frac{(1-k)(6-kr^2)}{2(1-kr^2)^2}, \qquad \text{..... (26)}$$

$$\frac{\sigma}{p}=\frac{6\sqrt{8\pi}(1-kr^2)}{(2-kr^2)}\sqrt{\frac{k}{k-1}} \qquad \text{..... (27)}$$

व $$\sigma+\rho_C\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)=\frac{3\sqrt{k(k-1)}}{\sqrt{8\pi}(1-kr^2)}+\frac{(1-k)(6-kr^2)}{16\pi(1-kr^2)^2} \qquad \text{..... (28)}$$

अब, गोलाकार पिंड के केंद्र अर्थात $r = 0$ पर समीकरण (26) द्वारा $k=1-8.373\rho_C$ प्राप्त होता है, जिसे $k < 0$ के साथ हल करने पर निम्न महत्वपूर्ण असमिका प्राप्त होती है:

$$\rho_C > 0.119 \qquad \text{..... (29)}$$

गोलाकार पिंड की सीमा पर अर्थात $r = R = 1$ पर, समीकरण (26) द्वारा $k = 6$ प्राप्त होता है, जो $k < 0$ की वजह से संभव नहीं है। अतः यह स्पष्ट है कि चर घनत्व, जो गोलाकार पिंड के केंद्र से सीमा तक जाने पर लगातार घट रहा है, पूर्ण रूप से शून्य नहीं होगा।

साथ ही, समीकरण (21) $k = 0$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें $r = 0.29R$ प्राप्त होता है। अतः $k < 0$ के साथ – साथ असमिका (29) को ध्यान में रखते हुए निम्न असमिका को अधिरोपित करना आवश्यक है:

$$r < 0.29R \qquad \text{..... (30)}$$

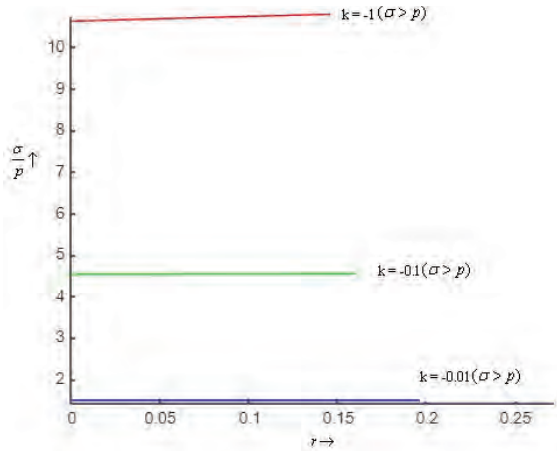
अब, हम k के विभिन्न ऋणात्मक मान, जो कि $k = 0$ के बहुत नजदीक अथवा दूर हैं के साथ – साथ $0 \le r \le \frac{R}{4}; R = 1$ की अलग – अलग स्थितियों पर विचार करते हैं:

स्थिति – 1: समीकरणों (27) व (28) में $k = -1$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $10.6321 \le \frac{\sigma}{p} \le 10.9542$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0661M$\odot$

स्थिति – 2: समीकरणों (27) व (28) में $k = -0.01$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $4.5335 \le \frac{\sigma}{p} \le 4.5476$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0214 M$\odot$

स्थिति – 3: समीकरणों (27) व (28) में $k = -0.01$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं: $1.4962 \le \frac{\sigma}{p} \le 1.4966$ अर्थात $\sigma > p$ व द्रव्यमान = 0.0118 M$\odot$

उपरोक्त तीनों स्थितियों को नीचे लेखाचित्र द्वारा दर्शाया गया है।



शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Gravitational Collapse	गुरुत्वीय निपात
Charge	आवेश
Variable Density	चर घनत्व
Pressure	दाब
Mass	द्रव्यमान
Induction	प्रेरण
Space - Time	दिक् – काल
Field Equation	क्षेत्र समीकरण

निष्कर्ष

उपरोक्त विश्लेषण में, बड़े व साथ ही छोटे आवेशित पिंडों के गुरुत्वीय निपात की रोकथाम को प्रदर्शित करने वाले एक निदर्श का अध्ययन किया गया है। समीकरणों (27), (28) व उन पर आधारित तीन स्थितियों का आकलन करने पर यह स्पष्ट है कि K के विभिन्न ऋणात्मक मानों के लिए, विभिन्न द्रव्यमान वाले पिंड आवेश द्वारा दाब को रोकने की वजह से स्थिर हैं। माहेश्वरी और गोखरू [10] ने अधिक द्रव्यमान वाले पिंडों के लिए अचर घनत्व के साथ आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात के रोकथाम की संभावना को दर्शाया है, जबकि वर्तमान अध्ययन में अचर घनत्व के स्थान पर चर घनत्व लेने पर उपरोक्त तीनों स्थितियों में प्राप्त द्वारा σ>P यह दर्शाया गया है कि कम द्रव्यमान वाले पिंडों में भी आवेश के प्रेरण द्वारा गुरुत्वीय निपात की रोकथाम संभव है।

संदर्भ

[1] J R Oppenheimer and H Snyder, (1939): Phys. Rev. 56, 455
[2] C W Misner, (1965): Phys. Rev. B137, 1360
[3] K Kuchar, (1968): Czech. J. Phys. B18, 435
[4] R F O'connell, (1975): GRG 6, 99
[5] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2010): IJMSEA, 4, 11
[6] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2011): Ultra Scientist, 23, 693
[7] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2012): Research Journal of Engineering Sciences, 1, 66
[8] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2012): Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, 12
[9] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2014): International Journal of Physical, Chemical and Mathematical Sciences, 3, 22
[10] Anil Maheshwari and M K Gokhroo, (2010): IJMSEA, 4, 415
[11] P C Vaidya and R Tikekar, (1982): J. Astrophys. Astron. 3, 325
[12] P C Vaidya and L K Patel, (1996): Pramana 46, 342
[13] R C Tolman, (1962): Oxford University Press Ltd., Oxford, 264