हम्प आव्यूह के लिए $C^1.T$ संकलनीयता का उपयोग करके $W(L^p,\Psi(w),\beta)$-वर्ग के फलनों के सन्निकटन (अनुमान) की त्रुटि

Error of approximation (estimation) of functions belonging to $W(L^p,\Psi(w),\beta)$- class using $C^1.T$-means for hump matrices

सचिन देवैया[1], शैलेष कुमार श्रीवास्तव[2]

Sachin Devaiya[1], Shailesh Kumar Srivastava[2]

[1,2]Department of Mathematics,
Sardar Vallabhbhai National Institute of Technology, Surat-395007, Gujarat, India.
sbdevaiya18695@gmail.com, shaileshiitr2010@gmail.com

https://doie.org/10.0729/VP.2024261336

सारांश

इस शोध पत्र में, हम हम्प आव्यूह के लिए, भारित लिप्सचिट्ज़ वर्ग $W(L^p,\Psi(w),\beta)$ के फलनों की फूरियर श्रेणी पर $C^1.T$- गुणन संकलनीयता का उपयोग करके, फलनों के सन्निकटन की त्रुटि प्राप्त करते हैं। इसके अलावा, हम अपने मुख्य प्रमेय से कुछ उपप्रमेय भी प्राप्त करते हैं।

Abstract

In this paper, we find the error of approximation of functions belonging to weighted Lipschitz class $W(L^p,\Psi(w),\beta)$ by using product summability method $C^1.T$ of its Fourier series for hump matrices. Further, we derive few corollaries from our main theorem.

मुख्य शब्द: हम्प आव्यूह, सन्निकटन की त्रुटि, $W(L^p,\Psi(w),\beta)$-वर्ग, फूरियर श्रेणी

Keywords: Hump matrix, Error of approximation, $W(L^p,\Psi(w),\beta)$-class, Fourier series.

परिचय

कई पूर्व शोधकर्ताओं [1-6] ने एकदिष्ट पंक्तियों (monotonic rows) के साथ विभिन्न संकलनीयता की तकनीकों का उपयोग करके विभिन्न लिप्सचिट्ज़ वर्गों में निहित फलनों के सन्निकटन (अनुमान) की त्रुटि प्राप्त की है। मित्तल आदि [7] ने पहली बार यह प्रस्तुत किया कि हर आव्यूह में एकदिष्ट पंक्तियाँ नहीं होती हैं, जैसे कि, हम्प आव्यूह। हम्प आव्यूह के लिए, उन्होंने त्रिकोणमितीय बहुपदों (trigonometric polynomials) का उपयोग करके $Lip\ (\alpha,p)$-वर्ग के फलनों का अनुमान लगाया है, और $o(C^{-\alpha})$ के रूप में त्रुटि प्राप्त की है। मिश्रा और मिश्रा [8] ने नोरलुंड (Nörlund) और रिज़्ज़ (Riesz) संकलनीयता का उपयोग करके समान लिप्सचिट्ज़ वर्ग से संबंधित फलनों के लिए समान त्रुटि प्राप्त की है। हम्प आव्यूह के लिए, श्रीवास्तव और सिंह [9], और श्रीवास्तव और देवैया [10] ने आव्यूह संकलनीयता का उपयोग करते हुए $W(L^p,\Psi(w),\beta)$-वर्ग से संबंधित फलनों के लिए $O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right),(c+1)^{\beta+1/p}\right)$ के रूप में त्रुटि प्राप्त की है। हालाँकि, [11-14] जैसे कई शोधकर्ताओं ने विभिन्न गुणनफल संकलनीयता (product summability) विधियों, जैसे कि $(N,p_n)(E,q),(C,1)(E,q)$ और $(\bar{N},p_n,q_n)(E,q)$ के माध्यम से विभिन्न लिप्सचिट् वर्गों में निहित फलनों के सन्निकटन की त्रुटि प्राप्त की है। इस शोध पत्र में, हम फलनों के सन्निकटन के लिए गुणनफल संकलनीयता $C^1.T$ का उपयोग करते हैं।

मान लीजिए $T \equiv (h_{c,e})$ एक निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (lower triangular matrix) है। इसे हम्प आव्यूह कहा जाता है, यदि सभी C के लिए $e_0 = e_0(c) \in N$ का इस प्रकार अस्तित्व है कि

$h_{c,e+1} \le h_{c,e}$, जहाँ $0 \le e < e_0$,

$h_{c,e+1} \le h_{c,e}$, जहाँ $0 \le e < c$.

एक आवृति फलन (periodic function) $g \in L^p([0,2\pi])$ की त्रिकोणमितीय फूरियर श्रेणी को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$g(z) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{e=1}^{\infty}(a_e \cos e z + b_e \sin e z),$$

तथा इस फूरियर श्रेणी के संगत (c + 1) वे आंशिक योग को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

$s_c(g;z) := \frac{a_0}{2} + \sum_{e=1}^{c}(a_e \cos ez + b_e \sin ez)$, $c \in N$,

$s_0(g;z) = \frac{a_0}{2}$,

जहां a_c तथा b_c फूरियर गुणांक (Fourier coefficient) है। $t_c(g;z)$ को निम्न प्रकार से परिभाषित करते है:

$$t_c(g;z) = \sum_{e=0}^{c} h_{c,e}\, s_e(g;z), c \in N_0, \qquad (1)$$

जहां $T \equiv (h_{c,e})$ अनृण प्रविष्टियों (non-negative entries) वाला एक निम्न त्रिभुजीय आव्यूह है, जो निम्नलिखित शर्तों को पूरा करता है :

$h_{c,-1} = 0$, $H_{c,e} = \sum_{v=e}^{c} h_{c,v}$ और $H_{c,0} = 1$, $c \in N_0$.

यदि $c \to \infty$ के लिए $t_c(g;z) \to s$ है, तो फलन g की फूरियर श्रेणी को T-संकलनीय कहा जाता है, और उसका T- संकलनीय योग S होता है।

यदि हम उपरोक्त समीकरण (1) में $h_{c,e} = \begin{cases} \frac{1}{c+1}, 0 \le e \le c, \\ 0, \quad e > c, \end{cases}$ लेते हैं, *तो आव्यूह T क्रम एक के सीजारो आव्यूह (Cesàro matrix of order one) में परिवर्तित हो जाता है और इसे (C, 1) या C^1 द्वारा निरूपित किया जाता है। T- संकलनीय के साथ C^1- संकलनीय के गुणनफल से C^1.T- संकलनीय प्राप्त होता है। इस प्रकार $\{s_c(g;z)\}$ के C^1.T- संकलनीय को $t_c^{C^1.T}(g;z)$ के द्वारा निरूपित किया जाता है और निम्न प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है :*

$$t_c^{C^1.T}(g;z) := (c+1)^{-1}\sum_{e=0}^{c}\left(\sum_{f=0}^{e} h_{r,k}\, s_k(g;z)\right), c \in N_0.$$

फलन $g \in L^p(I)$ के L^p-मानक (L^p-norm) को निम्नानुसार परिभाषित किया गया है :

$$\|g\|_p := \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(z)|^p dz\right\}^{1/p} \quad (1 \le p < \infty), \quad और$$

$$\|g\|_\infty = \text{उच्चक}_{0\le z\le 2\pi}|g(z)|.$$

[1-4, 6-14] में निम्नलिखित विभिन्न लिप्सचिट्ज़ वर्ग परिभाषित किए गए है।

$$Lip\,\alpha = \{g: I \to R: |g(z+w) - g(z)| = O(w^\alpha)\},$$

$$Lip(\alpha, p) = \{g \in L^p(I): |g(z+w) - g(z)|_p = O(w^\alpha)\},$$

$$Lip(\xi(w), p) = \{g \in L^p(I): |g(z+w) - g(z)|_p = O(\xi(w)\},$$

$$W(L^p, \xi(w)) = \left\{g \in L^p(I): |(g(z+w) - g(z))\sin^\beta\left(\frac{z}{2}\right)|_p = O(\xi(w))\right\},$$

$$W(L^p, \Psi(w), \beta) = \left\{g \in L^p(I): |(g(z+w) - g(z))\sin^\beta\left(\frac{z}{2}\right)|_p = O\left(\frac{\Psi(w)}{w^{1/p}}\right)\right\},$$

जहां $p \ge 1$, $w > 0$, $\beta \ge 0$, और फलन $\xi(w)$ और $\Psi(w)$ सकारात्मक रूप से बढ़ते हैं।

यदि हम उपरोक्त $W(L^p, \Psi(w), \beta)$ में $\Psi(w) = \xi(w)\, w^{\frac{1}{p}}$ लेते है, तो $W(L^p, \Psi(w), \beta)$, $W(L^p, \xi(w))$ में परिवर्तित हो जाता है। यदि $W(L^p, \xi(w))$ में $\beta = 0$ लेते है, तो $W(L^p, \xi(w))$, $Lip(\xi(w), p)$ में परिवर्तित हो जाता है। यदि $Lip(\xi(w), p)$ में $\xi(w) = w^\alpha, 0 < \alpha \le 1$ लेते है, तो यह $Lip(\alpha, p)$ में परिवर्तित हो जाता है। तत्पश्चात यदि $Lip(\alpha, p)$ में $p \to \infty$ लेते है, तो यह $Lip\ \alpha$ में परिवर्तित हो जाता है।

एक C घात के त्रिकोणमितीय बहुपद के द्वारा, फलन g के सन्निकटन की त्रुटि को निम्न प्रकार प्राप्त किया जाता है :

$$E_c(g) := \text{न्यूनक}_{T_c} \| g(z) - T_c(z) \|_p,$$

सन्निकटन की उपरोक्त विधि को त्रिकोणमितीय फूरियर सन्निकटन (trigonometric Fourier approximation)

कहा जाता है।

$$\varphi(z,w) = \varphi(w) = g(z+w) + g(z-w) - 2g(z)$$

और

$$H(c,w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}\frac{\sin(2e-2f+1)\frac{w}{2}}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}.$$

सभी फलनों $g \in W(L^p, \Psi(w), \beta)$ के लिए, हम मिन्कोव्स्की असमिका (Minkowski inequality) का उपयोग करके आसानी से प्रदर्शित कर सकते हैं कि फलन $\varphi(z,w) \in W(L^p, \Psi(w), \beta)$ होता है।

टिप्पणी : यहाँ पर हम आव्यूह $T \equiv (h_{c,f})$, जहां $h_{c,f} = \frac{1}{2023^c}\binom{c}{f}(2022)^{c-f}$, और श्रेणी $1 - 4046\sum_{c=1}^{\infty}(-4045)^{c-1}$ लेते है। इस श्रेणी का C वां आंशिक योग $s_c = (-4045)^c$ है। यह श्रेणी T- संकलनीय नहीं है और C^1-संकलनीय भी नहीं है, लेकिन यह $C^1.T$- संकलनीय है। इस प्रकार, हम देख सकते हैं कि गुणनफल संकलनीयता, एकल संकलनीयता (single summability) की तुलना में अधिक शक्तिशाली है।

मुख्य परिणाम

मुख्य प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित प्रमेयिका की आवश्यकता है।

प्रमेयिका 1 : $w \in (0, \frac{\pi}{c+1})$ के लिए $|H(c,w)| = O(c+1)$.

उपपत्ति : $\frac{w}{\pi} \le \sin\left(\frac{w}{2}\right)$ और $|\sin(cw)| \le cw$ का उपयोग करके, हम निम्नलिखित प्राप्त कर सकते हैं:

$$|H(c,w)| = \left|\frac{1}{2\pi,(c+1)}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e}\frac{h_{e,e-f}\sin\left((2e-2f+1)\frac{w}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi,(c+1)}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}\left|\frac{(2e-2f+1)\frac{w}{2}}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right|$$

$$\le \frac{1}{4(c+1)}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}(2e-2f+1)$$

$$= \frac{1}{4(c+1)}\sum_{e=0}^{c} H_{e,0}(2e+1)$$

$$= \frac{1}{4(c+1)}\sum_{e=0}^{c}(2e+1)$$

$$= O(c+1).$$

प्रमेयिका 2: $w \in (\frac{\pi}{c+1}, \pi)$ के लिए

$$|H(c,w)| = O\left(\frac{1}{w^2(c+1)}\right).$$

उपपत्ति: $\frac{w}{\pi} \le \sin\left(\frac{w}{2}\right)$, , $(c+1)$ और उच्चक $\{h_{c,e}\} = o(1)$ और h_{c,e_0} उच्चक$\{h_{c,0}, h_{c,1}, \ldots, h_{c,c}\}$ का उपयोग करके, हम निम्नलिखित प्राप्त कर सकते हैं :

$$|H(c,w)| = \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e}\frac{h_{e,e-f}\sin\left((2e-2f+1)\frac{w}{2}\right)}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right|$$

$$\le O\left(\frac{1}{w}\right)\left|\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}\exp\left(i(2e-2f+1)\frac{w}{2}\right)\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{w}\right)\left|\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}\exp(i(e-f)w)\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{w}\right)\left|\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e} h_{e,e-f}\exp(i f w)\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{w}\right)h_{c,e_0}\left|\frac{1-\exp(i(e+1)w)}{1-\exp(iw)}\right|$$

$$= O\left(\frac{1}{w}\right)h_{c,e_0}\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}\right|$$

$$= O\left(\left|\frac{1}{w^2(c+1)}\right|\right).$$

प्रमेय: मानें कि $T \equiv (h_{c,e})$ एक अनृण प्रविष्टियों के साथ हम्प आव्यूह है जिसमें $(c+1) * \text{उच्चक}_e\{h_{c,e}\} = O(1)$ होता है। मानें कि $\Psi(w)$ एक सकारात्मक वर्धमान फलन है जो निम्नलिखित शर्तों को पूरा करता है :

$$\frac{\Psi(w)}{w^{\beta+\frac{1}{p}}} \text{ एक वर्धमान फलन है,} \qquad (2)$$

$\left(\frac{\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)\varphi(w)}{\Psi(w)w^{-\frac{1}{p}}}\right)$, W का परिबद्ध फलन (bounded function) है जो कि सभी Z के लिए समान रूप (Uniformly) से लागू है, (3)

और

$$\left(\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\left(\frac{\Psi(w)}{w^{1+\frac{1}{p}+\beta}}\right)^p dw\right)^{\frac{1}{p}} = O(c+1)^{\beta+1}\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right) \qquad (4)$$

तो $W(L^p, \Psi(w), \beta)$-वर्ग में रहने वाले फलनों g की फूरियर श्रेणी पर $C^1.T$- संकलनीयता का उपयोग करके, फलनों के सन्निकटन की त्रुटि निम्नानुसार दी जाती है:

$$\| t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\|_p = O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta+\frac{1}{p}}\right),$$

जहां $p^{-1}+q^{-1}=1$ ।

उपपत्ति: स्थिति (i) $(p>1$ के लिए

हम निम्नलिखित लिख सकते हैं:

$$s_{c(g;z)}-g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(w)\sin(2c+1)\frac{w}{2}}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}dw,$$

$$t_c^{C^1.T}(g;z)-g(z)=\frac{1}{c+1}\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e}h_{e,f}[s_f(g;z)-g(z)]$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi(w)\,(2\pi(c+1))^{-1}\times$$

$$\sum_{e=0}^{c}\sum_{f=0}^{e}a_{e,e-f}\frac{\sin(2e-2f+1)\frac{w}{2}}{\sin\left(\frac{w}{2}\right)}dw$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi(w)\,H(c,w)\,dw$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}\varphi(w)\,H(c,w)\,dw+\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\varphi(w)\,H(c,w)\,dw$$

$$=M_1+M_2,(\text{मान लिया}). \tag{5}$$

निम्नलिखित को सिद्ध करने के लिए प्रमेयिका 1, होल्डर असमिका (Hölder inequality), $\varphi(w)\in W(L^p,\Psi(w),\beta)$, $\frac{w}{\pi}\le\sin\left(\frac{w}{2}\right)$, समाकलन की माध्यमान प्रमेय (mean value theorem for integrals), और शर्तों (2) और (3) का उपयोग करते हैं :

$$|M_1|\le\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}\left(\frac{\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)|\varphi(w)|}{w^{-\frac{1}{p}}\Psi(w)}\frac{|H(c,w)|\,\Psi(w)}{w^{\frac{1}{p}}\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)}\right)dw$$

$$\le\left[\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}\left(\frac{\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right).\,|\varphi(w)|}{w^{-\frac{1}{p}}\Psi(w)}\right)^{p}dw\right]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\left[\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}\left(\frac{|H(c,w)|.\,\Psi(w)}{w^{\frac{1}{p}}\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)}\right)^{q}dw\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\frac{\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)}{(c+1)^{\frac{1}{p}}}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}w^{-\frac{q}{p}-q\beta-q}\,dw\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta+\frac{1}{p}}\right). \tag{6}$$

हम निम्नलिखित को सिद्ध करने के लिए प्रमेयिका 2, होल्डर असामिका, $\varphi(w)\in W(L^p,\Psi(w),\beta)$, $\frac{w}{\pi}\le\sin\left(\frac{w}{2}\right)$ और शर्त (4) का उपयोग करते हैं :

$$|M_2|\le O\left\{\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\frac{w^{-\frac{1}{p}}\Psi(w)}{w^{2+\beta}(c+1)}dw\right\}$$

$$\le O\left(\frac{1}{c+1}\right)\left[\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\left(\frac{\Psi(w)}{w^{1+\beta+\frac{1}{p}}}\right)^{p}dw\right]^{\frac{1}{p}}\times$$

$$\left[\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}w^{-q}\,dw\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta}(c+1)^{1-\frac{1}{q}}\right)$$

$$=O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta+\frac{1}{p}}\right). \tag{7}$$

समीकरण (5), (6) और (7) को मिलाकर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\left|t_c^{C^1.T}(g;z)-g(z)\right|=O\left((c+1)^{\beta+1}\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)\right). \tag{8}$$

स्थिति (ii) (p = *1* के लिए)

उपरोक्त उपपत्ति के आधार पर, हम लिख सकते है:

$$t_c^{C^1.T}(g;z)-g(z)=M_1+M_2, \tag{9}$$

हम निम्नलिखित को सिद्ध करने के लिए प्रमेयिका 1, होल्डर असमिका, $\frac{w}{\pi}\le\sin\left(\frac{w}{2}\right)$, शर्तों (2) और (3) का उपयोग करते हैं :

$$|M_1|\le\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}\left(\frac{\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)|\varphi(w)|}{w^{-1}\Psi(w)}\frac{\Psi(w)\,|H(c,w)|}{w\,\sin^{\beta}\left(\frac{w}{2}\right)}\right)dw$$

$$\le O(c+1)\sup_{0<w\le\frac{\pi}{c+1}}\left(\left|\frac{\varphi(w)}{w^{-1}\Psi(w)}\frac{\Psi(w)}{w^{\beta+1}}\right|\right)\int_0^{\frac{\pi}{c+1}}dw$$

$$=O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta+1}\right). \tag{10}$$

इसी प्रकार से हम निम्नलिखित को सिद्ध करने के लिए प्रमेयिका 2, होल्डर असमिका, $\frac{w}{\pi}\le\sin\left(\frac{w}{2}\right)$ और शर्त (4) का उपयोग करते हैं :

$$|M_2|\le O\left\{\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\frac{w^{-3}\Psi(w)}{w^{\beta}(c+1)}\right\}$$

$$\leq O\left(\frac{1}{c+1}\right)\left\{\int_{\frac{\pi}{c+1}}^{\pi}\frac{\Psi(w)}{w^{\beta+2}}\,dw\right\}\sup_{\frac{\pi}{c+1}\leq w\leq\pi}\left|\frac{1}{w}\right|$$

$$= O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta}(c+1)^{1}\right)$$

$$= O\left((c+1)^{\beta+1}\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)\right). \qquad (11)$$

समीकरणों (9), (10) और (11) को मिलाकर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\left|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right|$$

$$= O\left((c+1)^{\beta+1}\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)\right). \qquad (12)$$

समीकरणों (8) और (12) को मिलाकर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$\| t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z) \|_p = O\left(\Psi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta+\frac{1}{p}}\right),$$

इस तरह हमने इस प्रमेय को सिद्ध किया।

निम्नलिखित परिणाम हमारे प्रमेय से प्राप्त किए जा सकते हैं:

उपप्रमेय 1. यदि प्रमेय में $\Psi(w) = \xi(w)\, w^{\frac{1}{p}}$ लेते है, तो फलन $g \in W(L^p, \xi(w))$ के लिए,

$$\left\|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)(c+1)^{\beta}\right).$$

उपप्रमेय 2. यदि प्रमेय में $\beta = 0$ और $\Psi(w) = \xi(w)\, w^{\frac{1}{p}}$ लेते है, तो फलन $g \in Lip(\xi(w), p)$ के लिए,

$$\left\|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right\|_p = O\left(\xi\left(\frac{\pi}{c+1}\right)\right).$$

उपप्रमेय 3. यदि प्रमेय में $\beta = 0$ और $\Psi(w) = w^{\alpha+\frac{1}{p}},\ \alpha \in \left(0,\frac{1}{q}\right)$ लेते है, तो फलन $g \in Lip(\alpha, p), \alpha < \frac{1}{q}$, और $p > 1$, के लिए,

$$\left\|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right\|_p = O\left(\frac{1}{(c+1)^{\alpha}}\right).$$

उपप्रमेय 4. यदि उपरोक्त परिणाम में $p \to \infty$ लेते है, तो फलन $g \in Lip\,\alpha\,(0 < \alpha \leq 1)$, के लिए,

$$\left\|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right\|_{\infty} = O\left(\frac{1}{(c+1)^{\alpha}}\right), \text{ जहां } 0 < \alpha < 1,$$

और

$$\left\|t_c^{C^1.T}(g;z) - g(z)\right\|_{\infty} = O\left(\frac{\log(c+1)}{c+1}\right), \text{ जहां } \alpha = 1.$$

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
approximation	सन्निकटन
Hump matrix	हम्प आव्यूह
summable	संकलनीय
summability	संकलनीयता

सन्दर्भ

1. Singh U, Srivastava SK: Fourier approximation of functions conjugate to the functions belonging to weighted Lipschitz class. Proc. World Congr. Eng. 1, 236-240 (2013).
2. Srivastava SK, Singh U: Trigonometric approximation of periodic functions belonging to weighted Lipschitz class $W(L^p, \Psi(t), \beta)$. Contemp. Math. 645, 283-291 (2015). http://dz.doi.org/10.1090/conm/645/12937
3. Rathore A, Singh U: On the degree of approximation of functions in a weighted Lipschitz class by almost matrix summability method. J. Anal. 28(1), 21-33 (2020). https://doi.org/10.1007/s41478-017-0030-0
4. Singh U: On the trigonometric approximation of functions in a weighted Lipschitz class. J. Anal. 29(1), 325-335 (2021). https://doi.org/10.1007/s41478-020-00267-5
5. Srivastava SK, Singh U: Trigonometric approximation of periodic functions belonging to $Lip\ (\omega(t), p)$-class. J. Comput. Appl. Math. 270, 223-230 (2014). https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.020
6. Sharma K: Study of error of approximation of conjugate Fourier series in weighted class by

almost Riesz means. Int. J. Appl. Math. 33(5), 867-877 (2020).

7. Kajla A, Mohiuddine SA, Alotaibi A, Goyal M, Singh KK: Approximation by ϑ-Baskakov–Durrmeyer-Type Hybrid Operators. Iran. J. Sci. Technol. Trans. A. Sci. 44(4), 1111-1118 (2020). https://doi.org/10.1007/s40995-020-00914-3
8. Mohiuddine SA, Singh KK, Alotaibi A: On the order of approximation by modified summation-integral-type operators based on two parameters. Demonstr. Math. 56(1), 20220182 (2023). https://doi.org/10.1515/dema-2022-0182
9. Rajawat RS, Singh KK, Mishra VN: Approximation by modified Bernstein polynomials based on real parameters, Math. Found. Comput. 2023 doi: 10.3934/mfc.2023005
10. Mittal ML, Rhoades BE, Mishra VN, Singh U: Using infinite matrices to approximate functions of class $Lip\ (\alpha,p)$ using trigonometric polynomials. J. Math. Anal. Appl. 326(1), 667-676 (2007).
11. Mishra VN, Mishra LN: Trigonometric approximation of signals (functions) in L^p -norm. Int. J. Contemp. Math. Sci. 7(19), 909–918 (2012).
12. Srivastava, S.K., Singh, U.: Trigonometric approximation of periodic functions belonging to weighted Lipschitz class $W(L^p,\Psi(w),\beta)$. Contemp. Math. 645, 283-291 (2015) http://dz.doi.org/10.1090/conm/645/12937
13. Srivastava SK, Devaiya S: Error estimation of signals (functions) belonging to class $W(L^p,\Psi(t),\beta)$ for Hump matrices. AIP Conf. Proc. 2435(1), 020043 (2022). https://doi.org/10.1063/5.0083602
14. Łenski W, Szal B: On pointwise approximation of conjugate functions by some Hump matrix means of conjugate Fourier series. J. Funct. Spaces 2015, (2015).