Solution of Linear Integer Fractional Programming Problem by Extended Fourier-Motzkin Elimination Technique

विस्तरित फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि द्वारा रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का हल

पवन किशोर टाक[1], ज्ञान शेखर[2], संजय जैन[3] एवं आदर्श मंगल[4]
Pawan Kishore Tak[1], Gyan Shekhar[2], Sanjay Jain[3] & Adarsh Mangal[4]
[1]Research Scholar (Mathematics), Bhagwant University, Ajmer (INDIA)
[2]Bhagwant University, Ajmer (INDIA); [3]S. P. C. Government College, Ajmer (INDIA)
[4]Engineering College Ajmer (INDIA)
[1]mathspawanalpha@gmail.com, [2]gyanshekhar677@gmail.com,
[3]drjainsanjay@gmail.com, [4]dradarshmangal1@gmail.com
https://doie.org/10.1229/VP.2023698052

सारांश

इस शोध पत्र में, विस्तरित फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि (Extended Fourier – Motzkin Elimination Technique) को रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या (Linear Integer Fractional Programming Problem) का हल किए जाने हेतु प्रस्तावित किया गया है। प्रस्तावित उपगमन (Approach) साहित्य में उपलब्ध अन्य विधियों की तुलना में अपेक्षाकृत अधिक दक्ष तथा समझने की दृष्टि से सरल है क्योंकि इस प्रविधि से समस्या को हल किए जाने का अभिकलन समय (Computation Time) अन्य विधियों की तुलना में कम लगता है। शोध पत्र के अंत में दृष्टान्तीय उदाहरण (Illustrative Example) के द्वारा इस प्रविधि को समझाया गया है।

Abstract

In this research paper, Extended Fourier-Motzkin Elimination Technique is proposed to find the solution of Linear Integer Fractional Programming Problem. The proposed approach is more efficient and easy to understand as compared to the other methods available in the literature because it takes least computation time as compared to other methods. At the end of the research paper, the same has been illustrated by an illustrative example.

मुख्य शब्द : रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या, पूर्णांक हल, फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि, इष्टतम हल

Keywords: Linear fractional programming problem, Integer solution, Fourier – Motzkin elimination technique, Optimal solution.

1. प्रस्तावना

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन, गणितीय इष्टतमन का एक अत्यंत महत्वपूर्ण उपवर्ग है। अंश तथा हर में अऋणात्मक चरों (Non-negative variables) के साथ रैखिक फलनों के भिन्न रूप के उद्देश्य फलन (Objective function) को दिए गए रैखिक व्यवरोधों (Linear constraints) के साथ इष्टतम करना ही रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्श (linear fractional programming model) का उद्देश्य होता है।

रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन आधुनिक व तीव्रगामी वृद्धि लिए हुए एक व्यावहारिक विषय है। रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन को अतिपरवलयिक इष्टतमन समस्या (Hyperbolic optimization problem) भी कहा जाता है। भिन्नात्मक प्रोग्रामन का प्रयोग संचार तंत्र (Communication System), सैन्य विज्ञान (Military Science), प्रबंध (Management), उद्योग (Industries) तथा उत्पादन (Production) इत्यादि से जुड़ी हुई विविध समस्याओं में किया जाता है। कई शोधकर्ताओं ने रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्याओं को विभिन्न तकनीकों से हल किया है। पूर्व में चढ़ा [1], चार्नेस एवं अन्य [2], हिर्चे [3], जैन एवं अन्य [4,5,6,7,9], स्वरुप [8] तथा टांक एवं अन्य [10] ने भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्याओं को हल किया तथा इनसे सम्बंधित पुनरावृत्त विधियाँ प्रस्तुत की। इस शोध पत्र में रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या को फूरिए– मोट्जकिन विलोपन प्रविधि द्वारा हल किए जाने की विवेचना किया जाना प्रस्तावित है।

शोध पत्र का संगठन निम्नानुसार है : खंड 2 में रैखिक प्रोग्रामन समस्या को फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि से हल किए जाने से सम्बंधित व्याख्या दी गयी है। खंड 3 में रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्श को प्रस्तावित फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि से हल किए जाने से सम्बंधित समस्या का संरूपण किया गया है। खंड 4 में प्रस्तावित फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि को समझाने के लिए एक दृष्टान्तीय उदाहरण प्रस्तुत किया गया है। अंत में खंड 5 में शोध पत्र का निष्कर्ष समाहित है।

रैखिक प्रोग्रामन समस्या के लिए फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि

फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि लघु रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं को हल करने के लिए अत्यंत महत्वपूर्ण प्रविधि है। यदि कोई समीकरण साधनीय (Solvable) हो तो ठीक एक हल देता है, परन्तु असमिका होने की अवस्था में इसके परिबद्ध रूप (Bounded form) में कई हल संभव हो सकते है। इन हलों में से हमें विचारार्थ समस्या (Problem under consideration) की आवश्यकतानुसार इष्टतम हल का चयन करना होता है। यहाँ हमने एक ही प्रकृति की असमिकाएं या तो ($\geq$) या ($\leq$) के निकाय की असमिकाओं को हल करने के लिए फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि का प्रयोग किया है। इस प्रविधि में प्रत्येक चर x_i के सापेक्ष तीन प्रकार के वर्गों (प्रथम वर्ग, द्वितीय वर्ग एवं तृतीय वर्ग) की असमिकाएं सम्मिलित होती है।

प्रथम वर्ग : यदि किसी असमिका में सम्मिलित किसी चर x_i का गुणांक +1 हो तो ऐसी असमिकाओं को प्रथम वर्ग में वर्गीकृत करते है।

द्वितीय वर्ग : यदि किसी असमिका में सम्मिलित किसी चर x_i का गुणांक –1 हो तो ऐसी असमिकाओं को द्वितीय वर्ग में वर्गीकृत करते है।

तृतीय वर्ग : यदि किसी असमिका में सम्मिलित किसी चर x_i का गुणांक 0 हो तो ऐसी असमिकाओं को तृतीय वर्ग में वर्गीकृत करते है।

इसके पश्चात, समस्या के इष्टत्मव की लब्धि हेतु चरों को विलोपित करते है। समस्या में सम्मिलित असमिकाओं को इस प्रकार संयोजित किया जाता है कि प्रत्येक पुनरावृत्ति में एक–एक चर का विलोपन हो जाये। इसी प्रक्रिया की पुनरावृत्ति करते रहने पर अंतिम चरण में केवल एक चर परिबद्ध रूप में प्राप्त होता है। इस अंतिम चरण में परिबद्ध रूप से प्राप्त चर का अनुमेय (Permissible) मान प्राप्त करते हैं। पश्च–प्रतिस्थापन की प्रक्रिया से हम अन्य चरों के अनुमेय मान प्राप्त करते हैं तथा इस प्रकार दी गई समस्या के इष्टतम हल को प्राप्त करते हैं।

2. विचारार्थ समस्या

निम्न रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या पर विचार करते हैं :

अधिकतम कीजिये $Z=((ax+\propto))/((cx+\beta))$

प्रतिबंध $Ax\leq b$

तथा $x\geq 0$

यहाँ यह मान लिया गया है कि समस्या के सुसंगत हलों का समुच्चय परिमित चरम बिन्दुओं एवं $(cx+\beta)\neq 0$ के साथ एक अवमुख बहुफलक बनाता है।

सर्वप्रथम, हम दी गई समस्या में सम्मिलित उद्देश्य फलन को असमिकाओं में परिवर्तित कर मानक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं।

अधिकतम कीजिये Z

$(cx+\beta)Z-(ax+\propto) \geq 0$

$-(cx+\beta)Z+(ax+\propto) \geq 0$

इसके पश्चात दी गई समस्या में उपस्थित सभी असमिकाओं को एक ही प्रकृति की असमिकाओं में $(\geq)$ में परिवर्तित करते हैं। अतः दी गई समस्या निम्न रूप में समानीत होती है :

अधिकतम कीजिये Z

$(cx+\beta)Z-(ax+\propto) \geq 0$

$-(cx+\beta)Z+(ax+\propto) \geq 0$

$-Ax\geq -b$

$x\geq 0$

अब हमें चर x_i के तीन वर्ग बनाने होते हैं। हमें असमिकाओं को इस प्रकार संयोजित करना होता है कि प्रत्येक पुनरावृत्ति पर एक चर का विलोपन हो जाये। इस प्रक्रिया के किसी भी चरण पर यदि हमें $0\leq d$ प्राप्त हो जाये, जहाँ d एक धनात्मक संख्या नहीं है तो हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि विचारार्थ समस्या का सुसंगत हल विद्यमान नहीं है, अन्यथा प्राप्त किया गया हल सुसंगत है।

3. दृष्टान्तीय उदहारण

निम्न रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का पूर्णांक हल ज्ञात करने के लिए फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि का उपयोग करते हैं :

अधिकतम कीजिये $Z=(5x+3y)/(5x+2y+2)$

प्रतिबन्ध $3x+2y\leq 12$

$y\leq 2$

तथा $x,y\geq 0$ तथा पूर्णांक है।

सर्वप्रथम, हम दी गई समस्या के उद्देश्य फलन को असमिकाओं के रूप में निम्न प्रकार लिखते हैं :

अधिकतम कीजिये Z

$5(Z-1)x+(2Z-3)y+2Z\geq 0$

$-5(Z-1)x-(2Z-3)y-2Z\geq 0$

इसके पश्चात हम समस्या में दी गई सभी असमिकाओं को एक ही प्रकृति की असमिकाओं में परिवर्तित कर मानक रूप में निम्न प्रकार लिखते हैं :

$5(Z-1)x+(2Z-3)y+2Z\geq 0$

$-5(Z-1)x-(2Z-3)y-2Z\geq 0$

$-3x-2y\geq -12$

$-y\geq -2$

$x\geq 0$

$y\geq 0$

अब हमारा उद्देश्य निर्णायक चरों x एवं y के अऋणात्मक मानों के लिए Z का इष्टतम मान ज्ञात करना है। अतः Z के अधिकतम मान के लिए यह मानते हैं कि $1<Z<3/2$

Z के उपरोक्त परिबंधों को ध्यान में रखते हुए ये असमिकाएं निम्न प्रकार समानीत होती है :

$$x+\frac{(2Z-3)y}{5(Z-1)}+\frac{2Z}{5(Z-1)}\geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$-x-\frac{(2Z-3)y}{5(Z-1)}-\frac{2Z}{5(Z-1)}\geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$-x-\frac{2}{3}y\geq -4 \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$-y\geq -2 \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$x\geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$y\geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

उपरोक्त असमिकाओं से चर x का विलोपन किए जाने के पश्चात निम्न निकाय प्राप्त होता है :

$-y+\frac{6Z}{(4Z-1)} \geq -\frac{60(Z-1)}{(4Z-1)}$........(7)

$-y \geq -6$........................(8)

$y-\frac{2Z}{(3-2Z)} \geq 0$...............(9)

$-y \geq -2$......................(10)

$y \geq 0$............................(11)

उपरोक्त असमिकाओं से चर y का विलोपन किए जाने के पश्चात निम्न निकाय प्राप्त होता है :

$7Z^2-16Z+9 \leq 0$...........(12)

$Z \leq \frac{9}{7}$............................(13)

$Z \leq 1$............................(14)

$Z \geq \frac{10}{11}$.........................(15)

$0 \geq -6$.........................(16)

$0 \geq -2$.........................(17)

उपरोक्त असमिकाओं से Z के विभिन्न मान प्राप्त हो रहे हैं किन्तु अधिकतम Z का अनुमेय (Permissible) मान Z = 9/7 है। अतः Z = 9/7

अब Z = 9/7 को असमिकाओं (7) से (11) में प्रतिस्थापित करते हैं जिससे चर y के लिए विभिन्न परिबद्ध मान प्राप्त होते हैं। इन मानों में से केवल y = 2 ही ऐसा मान है जोकि असमिका निकाय (7) से (11) को एकसाथ संतुष्ट करता है। अतः y = 2

अब y = 2 व Z = 9/7 को असमिकाओं (1) से (6) में प्रतिस्थापित कर चर x के लिए विभिन्न परिबद्ध मान प्राप्त करते हैं। इन मानों में से केवल x = 8/3 ही ऐसा मान है जोकि असमिका निकाय (7) से (11) को एकसाथ संतुष्ट करता है। अतः x = 8/3

अतः उपरोक्त रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या का इष्टतम हल x = 8/3 , y = 2 तथा Z = 9/7

किन्तु यहाँ हमें उपरोक्त समस्या का पूर्णांक हल ज्ञात करना है, अतः हम चरों x व y के विभिन्न संयोजनों 2≤x≤3,y=2 पर विचार करते हैं।

निम्न दो संयोजन संभावित हैं :–

x = 3, y = 2 इस स्थिति में हल असुसंगत है।

x = 2 , y = 2 इस स्थिति में हल सुसंगत है।

अतः विचारार्थ समस्या का इष्टतम पूर्णांक हल x = 2 , y = 2 तथा अधिकतम z = 1 है।

निष्कर्ष

पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन को हल करने के लिए प्रस्तावित विधि गोमोरी कटिंग प्लेन विधि व ब्रांच एवं बाउंड विधि से अधिक दक्ष है। गोमोरी कटिंग प्लेन विधि में प्रत्येक पुनरावृत्ति में एक भिन्नात्मक व्यवरोध को जोड़ा जाकर एकधा विधि (Simplex Method) का उपयोग किया जाता है जो कि गणना को और अधिक क्लिष्ट बनाता है। ब्रांच एवं बाउंड विधि में प्रत्येक पुनरावृत्ति पर शाखन प्रक्रम (Branching Process) का उपयोग किया जाता है जबकि प्रस्तावित विधि में केवल एक पुनरावृत्ति में परिबंध की धारणा का प्रयोग कर हल प्राप्त किया गया है।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिंदी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिंदी शब्दावली
Approach	उपगमन
Bounded form	परिबद्ध रूप
Branching process	शाखन प्रक्रम
Computation time	अभिकलन समय
Extended Fourier - Motzkin Elimination Technique	विस्तरित फूरिए – मोट्जकिन विलोपन प्रविधि

Hyperbolic optimization problem	अतिपरवलयिक इष्टतमन समस्या
Illustrative example	दृष्टान्तीय उदाहरण
Linear constraint	रैखिक व्यवरोध
Linear fractional programming model	रैखिक भिन्नात्मक प्रोग्रामन निदर्श
Linear Integer Fractional Programming Problem	रैखिक पूर्णांक भिन्नात्मक प्रोग्रामन समस्या
Non-negative variable	अऋणात्मक चर
Objective function	उद्देश्य फलन
Permissible	अनुमेय
Simplex method	एकधा विधि
Solvable	साधनीय

सन्दर्भ

[1] Chadha, S. S., "A Linear Fractional Program with homogeneous Constraints", OPSEARCH,36, pp. 390-398, 1999.

[2] Charnes, A. and Cooper, W.W., "Programming with linear fractional functionals", Naval Research Log. Quart., 9 pp. 181-186, 1962.

[3] Hirche, J., " A note on programming problems with linear-plus linear fractional objective functions", European Journal of Operations Research, 89, pp. 212-214, 1996.

[4] Jain, S. and Mangal, A. "Modified Fourier elimination technique for fractional programming problem", Acharya Nagarjuna International Journal of Mathematics and Information Technology, 1, pp. 121-131, 2004.

[5] Jain, S. and Mangal, A. "Extended Modified Fourier Elimination Technique for Integer Solution of Fractional Programming Problem", Varahmihir Journal of Mathematical Sciences, Vol.8, No. 1, pp. 179-186, 2008.

[6] Jain, S. and Mangal, A., "Gauss Elimination Technique for Fractional Programming Problem", J. Indian Soc. Stat. Opers. Res., Vol. XXIX, No. 1-4, pp. 35-40, 2008.

[7] Jain, S. and Mangal, A., "Extended Gauss Elimination Technique for Integer Solution of Linear Fractional Programming", Journal of the Indian Math. Soc., Vol. 75, Nos. 1-4, pp. 37-46, 2008.

[8] Swarup, K., "Linear Fractional Functionals Programming" , Operations Research, 13, pp. 1029-1036, 1965.

[9] Agarwal, M.L., Jain, S., Mangal, A. and Shekhawat, V.R.S. "A Heuristic Approach to Deduct the Redundant Constraints in Fractional programming Model" Vigyan Prakash, January – June, pp.10 – 15, 2020.

[10] Tak,P.K., Shekhar, G., Jain,S. and Mangal, A."Solution of Linear Fractional Programming Problem by Fourier-Motzkin Elimination Technique" Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, Vol. 12, No.14,pp. 621-625, 2021.

कठिनाइयों के बीच से ही अवसर निकलते हैं।

In the middle of difficulty lies opportunity.

- अल्बर्ट आइंस्टीन

एक जहाज हमेशा किनारों पर सबसे सुरक्षित होता है, लेकिन यह इसके लिए नहीं बना है।

A ship is always safe at shore but that is not what it is built for.

- अल्बर्ट आइंस्टीन