पिंगल कृत छन्दःसूत्रम् – वैदिक गणितीय अनुप्रयोग

The Chchandasutra of PIṄGALA – Sanskrit Metrics with Mathematical Representation*

वेद भारतीय ज्ञान–विज्ञान का आधार है। वेद के हरेक मंत्र के देवता, ऋषि और छंद ज्ञात हैं। वेद मंत्रों के उच्चारण, शब्द, अर्थ, छंदों को जानने, काल गणना आदि के लिए छह वेदांग ग्रंथों की रचना की गई। छंद भावों को गेय रूप, निर्धारित वर्णों या मात्राओं के आधार पर प्रदान करता है। वैदिक मंत्रों में प्रयुक्त छंदों में मुख्य हैं – गायत्री (8 वर्णों के तीन पाद), त्रिष्टुप (11 वर्णों के चार पाद), अनुष्टुप (8 वर्णों के चार पाद), जगती (8 वर्णों के छह पाद), बृहती (36 वर्ण तथा चार पाद, आठ–आठ–बारह–आठ वर्णों के होते हैं), पंक्ति (4 या 5 पाद) एवं उष्णिक (28 वर्ण तथा तीन पाद, आठ–आठ–बारह वर्णों के होते हैं)।

विशेष रूप से संस्कृत मंत्र एवं श्लोक और संगीत के कुछ मौलिक सिद्धान्तों को गणित के आधार पर अच्छी तरह से समझा जा सकता है। अगर हम वेद के विकृति पाठों को देखें तो पाठ के अनन्तर अक्षरों के पुनरावृत्ति को गणित के माध्यम से आसानी से समझ सकते हैं। जैसे जटा पाठ के लिए सूत्र है–

अनुलोमविलोमाभ्यां त्रिवारं हि पठेत् क्रमम् ।
विलोमे पदवत् सन्धिः अनुलोमे यथाक्रमम् ।।

यानि जटा पाठ में पदों (जो नीचे संख्या में है) का क्रम होगा–

12 21 12

23 32 23

34 43 34

45 54 45 ...यथाक्रम

गणित और संगीत के बीच एक गहरा संबंध है। संगीत का अर्थ है ध्वनि का पैटर्न बनाना और गणित के द्वारा हम पैटर्न का अध्ययन करते हैं। दूसरे शब्दों में संगीत के सभी राग, ताल, लय को कई अलग–अलग गणितीय दृष्टिकोणों से अध्ययन किया जा सकता है। यदि हम भारतीय शास्त्रीय संगीत का अध्ययन करते हैं तो हम पाते हैं कि ''ताल'' या मीटर आंतरिक रूप से संख्याओं से जुड़ा हुआ है। यह भी पाया गया है कि संगीत, वाद्य या गायन सीखने से गणितीय अवधारणाओं को समझना सरल हो जाता है। संगीत और गणित का यह संबंध हजारों साल पुराना है और इसे जानना गणित को नई रोशनी में देखने जैसा होगा।

हम गणित में अक्सर Fibonacci संख्याओं के बारे में बात करते हैं। प्राचीन भारत में आचार्य पिंगल (पाँचवीं ई. पूर्व) द्वारा रचित "छन्दःसूत्रम्" में अक्षर गणना के आधार पर मंत्रों का वर्गीकरण मिलता है। हमें द्वि आधारी अंक प्रणाली (Binary Number System) का पहला ज्ञात विवरण यहीं मिलता है। इसे ह्रस्व स्वर

और दीर्घ स्वर के निश्चित पैटर्न के द्वारा दर्शाया गया है। Fibonacci से पहले, आचार्य हेमचंद्र (1150 ई.) ने भी, अनुक्रम Fn से संबंधित विषय पर पहले से उपलब्ध कई तरीके गिनवाए थे, जो एक–बीट और दो–बीट स्वर–चिन्हों (नोटों) से बनने वाले लयबद्ध पैटर्न को दर्शाता है। इसलिए हेमचंद्र ने संख्या 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... का स्पष्ट रूप से उल्लेख किया।

संगीतज्ञ और भाषाविद् आचार्य पिंगल ने अक्षर (syllable) उच्चारण को ह्रस्व स्वर के साथ लघु (संकेत : I, इसकी 1 मात्रा गिनी) और दीर्घ स्वर अथवा विसर्ग या अनुस्वार के साथ गुरु (संकेत : S, इसकी 2 मात्रा गिनी) माना तथा संयुक्त व्यंजन के साथ कोई भी स्वर हो तो दीर्घ माना जाएगा। यमाताराजभानसलगा (संकेत : ISSSISIIIS) से (प्रत्येक 3 संकेतों के) आठ गण बताए, जैसे पहला यगण ISS, दूसरा मगण SSS, ……, अन्त में सगण IIS अष्टक बने। इस प्रकार द्विआधारी संख्या (Binary Number) के आधार पर गणना से छंदों का वर्गीकरण किया। आज कम्प्यूटिंग में गणना का आधार द्विआधारी संख्याएं 0 और 1 हैं। द्विपद प्रमेय (binomial theorem) अर्थात् $(क+ख)^n$ के गुणांकों की गणना विधि भी बताई । मेरु प्रस्तार को आज Pascal Triangle के रूप में बताया जाता है। $(1+1)^n$ का विस्तार 1, 1 1, 1 2 1, ... अर्थात् $2^0, 2^1, 2^2$, ---- 2^n होगा। उच्चारण समय लघु के लिए 1 और गुरु के लिए 2 मान लेने से अक्षरों की संख्या के आधार पर अधिकतम क्रम भिन्न पदों की संख्या इस प्रकार बताई – 1(लघु) से 1; 1 (दीर्घ) से 1; 2 से 2 (1+1, 2); 3 से 3 (1+1+1, 1+2, 2+1, 2+1); 4 से 5 (1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+2, 2+1+1, 2+2+1); .... परिभाषा के अनुसार पहली दो संख्याओं में लघु अथवा गुरु हैं। इसके बाद आने वाली प्रत्येक संख्या पिछले दो संख्याओं का योग है। इस संख्या श्रेणी को मात्रमेरु (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...) कहा, जिसे 13वीं शताब्दी में Fibonacci Series के नाम से बताया गया।

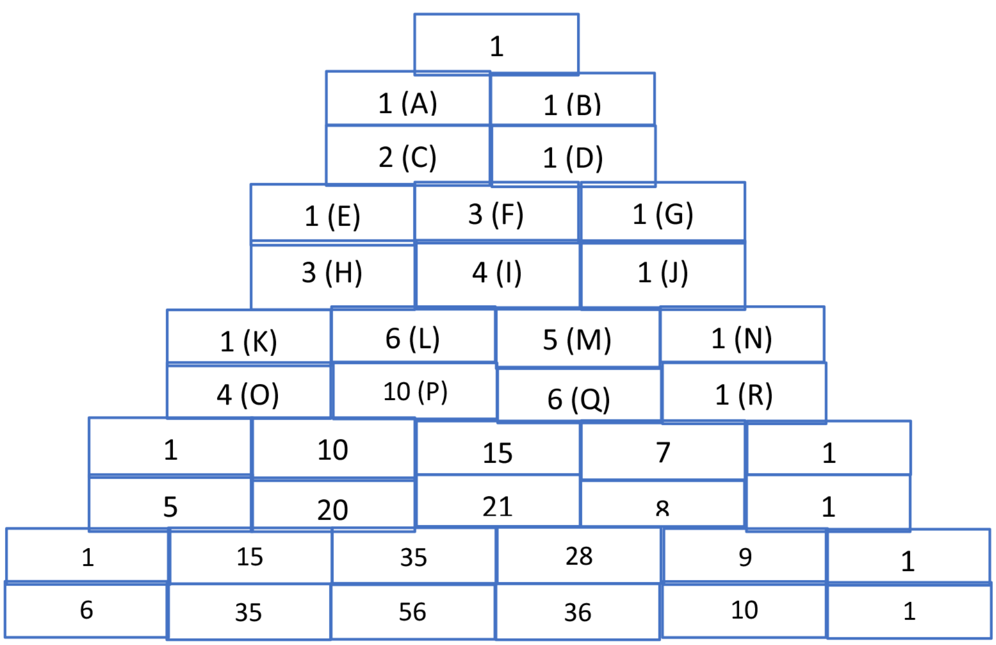
मेरु– प्रस्तार के अन्तर्गत वर्ण–प्रस्तार और मात्रा– प्रस्तार प्रमुख है। वर्ण–प्रस्तार में वर्णों अर्थात् अक्षरों की संख्या गिनी जाती है तथा मात्रा– प्रस्तार में वर्ण की मात्राएं गिनी जाती हैं। पिंगल छन्दःसूत्र में 1 से 26 अक्षर प्रतिपाद वाले छन्द का वर्णन है। प्रत्येक छन्द में लघु–गुरु वर्णों का विशेष क्रम निर्धारित है। वर्ण–प्रस्तार में बताया गया हैकि 2, 3, 4, 5, 6 आदि वर्णों के कितने भेद हो सकते हैं अर्थात् उसमें लघु–गुरु वर्णों को कितने प्रकार से रखा जा सकता है। लघु–गुरु अक्षरों के भेद से छन्द भेद हो जाता है। 3–वर्णीय मेरु

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

तीन वर्ण के प्रस्तार के 8 (2x2x2) रूप होते हैं।

भेद	गुरु / लघु	स्वरूप	गणनाम
1	S S S	सर्वगुरु	मगण
2	I S S	आदिलघु	यगण
3	S I S	लघुमध्य	रगण
4	I I S	अन्तगुरु	सगण
5	S S I	अन्तलघु	तगण
6	I S I	मध्यगुरु	जगण
7	S I I	आदिगुरु	भगण
8	I I I	सर्वलघु	नगण

मात्रा मेरु के द्वारा ज्ञात होता है कि नियत संख्या के मात्रा–प्रस्तार में कितने सर्वलघु, कितने 1 गुरु, कितने 2 गुरु, कितने 3 गुरु आदि होते हैं। चित्र में (नीचे) 6 कोष्ठ वाला मात्रा–मेरु का प्रस्तार दिखाया गया है। जिस प्रकार वर्ण–मेरु बनाने में कोष्ठ बनाए जाते हैं, उसी प्रकार मात्रा–मेरु में भी ऊपर से नीचे कोष्ठ बनाए जाते हैं। दोनों में अन्तर यह है कि मात्रा मेरु में 1 कोष्ठ के नीचे दोनों ओर निकले हुए दो–दो कोष्ठ बनाए जाते हैं। दो–दो कोष्ठ का जोड़ा है। दोनों कोष्ठ एक सीध में होंगे। इसके बाद दूसरे, तीसरे, चौथे आदि सभी में दो–दो कोष्ठ बनेंगे। इस प्रकार दो कोष्ठों को मिलाकर एक कोष्ठ माना जाएगा। 6 कोष्ठ के लिए ऊपर से नीचे 11 पंक्तियां होंगी। प्रत्येक पंक्ति 1–1 मात्रा की बोधक है। 11 पंक्तियों का अभिप्राय है 1 से 11 मात्राओं से संबद्ध ये पंक्तियाँ हैं। कुछ कोष्ठों में A,B,C,D... मात्र समझाने के उद्देश्य से लिखा गया है।



कोष्ठ भरने की विधि इस प्रकार है–

1. सबसे ऊपर के कोष्ठ में एक लिखें। 1 मात्रा का प्रस्तार 1 ही होता है।
2. कोष्ठ जोड़ों में बाईं ओर ऊपर में 1–1 और नीचे में 2,3,4,5... क्रमशः लिखें।
3. दायीं ओर के सभी कोष्ठों में 1 लिखें।
4. नीचे के खाली कोष्ठ को भरने के लिए उपर के दो कोष्ठ को लेना पड़ता है। ऊपर के कोष्ठ का अंक लें और उसे नैर्ऋत्य कोण (बाईं ओर) के अंक से जोड़ें। जोड़ को खाली कोष्ठ में भरें। यथा– B+C=F, D+F=I, F+H=L, G+I=M, I+L=P ।

इसमें लघु–गुरु के ज्ञान के लिए दायीं से बाईं कोष्ठ की ओर चलते हैं। अन्तिम कोष्ठ की संख्या सर्वलघु की होती है। उसके बाईं ओर की संख्या 1 गुरु की होती है। उसके बाईं ओर की संख्या 2 गुरु वाली संख्या बताती है। इसी प्रकार उससे बाईं ओर की संख्या 3 गुरु की संख्या बताती है। उदाहरण के लिए, (चित्र के) 7 वीं पंक्ति में ये नम्बर हैं – 4, 10, 6 और 1। बाईं ओर से चलें तो, 1 संख्या सर्वलघु बताती है। 6 संख्या 1 गुरु बताती है। 10 संख्या द्विगुरु बताती है और 4 संख्या त्रिगुरु बताती है। इसी प्रकार हम अन्य मात्रा वाली पंक्तियों का अर्थ समझ सकते हैं।

उपर्युक्त जानकारी से स्पष्ट है कि आचार्य पिंगल ने छन्दःसूत्र में गणितीय अनुप्रयोगों के आधारपर वैदिक छन्दों का वर्गीकरण किया। आचार्य पिंगल ने संगीत में गणितीय सूत्रों के प्रतिपादन में द्विआधारी संख्या (binary numbers), द्विपद प्रमेय (binomial theorem), मेरु प्रस्तार (Pascal Triangle) और मात्रा मेरु (Fibonacci Series) का प्रयोग किया। अतः उन्हें कलन विधि (Algorithm) का जनक कह सकते हैं।

*Source - Vedic Heritage Portal (http://vedicheritage.gov.in)

– प्रतापानन्द झा
pjha@ignca.nic.in

एक बार स्वास्थ्य खराब होने के कारण रामानुजन अस्पताल में थे। प्रोफेसर हार्डी उनसे मिलने आए। हार्डी उस दिन बहुत उदास थे जबकि रामानुजन काफी प्रसन्न थे। रामानुजन ने उनसे पूछा, ''आप इतने परेशान क्यों हैं? हार्डी ने उत्तर दिया, ''तुम तो संख्याओं के जादूगर हो, परंतु आज मैं जिस टैक्सी में आया हूँ मुझे उसका नंबर बहुत नीरस लगा।" ''क्या नंबर था?'' रामानुजन ने पूछा। हार्डी ने कहा, ''वह नंबर था 1729''। रामानुजन का उत्तर था, ''शायद 1729 से अधिक दिलचस्प संख्या तो कोई हो ही नहीं सकती।'' रामानुजन संख्या' उस प्राकृतिक संख्या को कहते हैं जिन्हें दो संख्याओं के घनों के योग के रूप में दो अलग–अलग प्रकार से लिखा जा सकता है। जैसे कि -
$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$, $1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$