शोध आलेख / Research Article

महामारी हेतु नवीन(एस+एएस) इ आई आर गणितीय निदर्श

New (S+AS) EIR Mathematical Model For Covid Epidemic

संजय जैन[1], आदर्श मंगल[2] एवं शगुन जैन[3]
Sanjay Jain[1], Adarsh Mangal[2] and Shagun Jain[3]
[1]Samrat Prithviraj Chouhan Government College Ajmer-305001, INDIA
[2]Engineering College Ajmer-305025, INDIA
[3]MD Program, AMA School of Medicine, Manila-1200, Philippines
[1]drjainsanjay@gmail.com, [2]dradarshmangal1@gmail.com, [3]shagunajmer@gmail.com

सारांश :

किसी महामारी में बीमारी के लक्षणों, निदर्श, अनुकार तथा संबंधित क्रिया से सम्बद्ध ज्ञानार्जन को सम्मिलित करते हुए उपचार का निर्णय करना एक मूलभूत प्रक्रम होता है। महामारी से संबंधित समस्याओं में उस विशेष बीमारी के लिए जिम्मेदार लक्षणों के आधार पर उपचार का निर्णय किया जाता है, किन्तु बहुत सारे लोगों में महामारी से सम्बद्ध लक्षण प्रकट नहीं होते हुए भी वे इस बीमारी से ग्रसित पाए गए है। अतः इस अवस्था को वर्तमान में महामारी से संबंधित निदर्शों में सम्मिलित करना समय की मांग बन चुकी है। इस शोध पत्र में एक व्यापकीकृत नया गणितीय निदर्श महामारी के संदर्भ में प्रस्तावित किया गया है जिसमें बीमारी से संबंधित लक्षण रखने वाले तथा लक्षण नहीं रखने वाले दोनों ही प्रकार के रोगियों पर विचार किया गया है।

Abstract:

Decision making for treatment in an epidemic is a fundamental process involving acquisition of characteristics of diseases, modelling, simulations and action. In epidemic decision problems, criteria can be determined by prescribed symptoms of disease for treatment but in case of COVID epidemic many asymptomatic patient occurs. Therefore it is demand of time to combine this situation in the models related with today's COVID pandemic. In this research paper, a generalized new mathematical model for COVID epidemic in which both symptomatic and asymptomatic patients are considered for mathematical modelling of COVID epidemic.

मुख्य शब्द : कोविड –19, अलक्षणात्मक रोगी, लक्षणात्मक रोगी, गणितीय निदर्श।

Keywords: COVID-19, asymptomatic patients, symptomatic patients, mathematical model.

1. परिचय

वर्तमान परिदृश्य में लगभग सभी देश कोविड महामारी से लोहा ले रहे है। पिछले लगभग एक वर्ष से हम सामान्य दिशानिर्देशों जिनमें सामाजिक दूरी (Social Distancing), प्रक्षालक (Sanitizer) का प्रयोग तथा मुख–कवच (Face Mask) का उपयोग कर इस महामारी से लड़कर विजय पाने का प्रयास कर रहे थे। जिनमें अब द्विपरतीय मुख–कवच का उपयोग तथा टीके लगवाकर बीमारी को और आगे संक्रमण से रोकने का प्रयास हमारे द्वारा किया जा रहा है। विश्व स्वास्थ्य संगठन की वेबसाईट पर उपलब्ध मृत्यु दर के आंकड़ों से यह दृष्टिगत होता है कि संयुक्त राज्य अमेरिका, फ्रांस, इटली तथा अन्य सर्वश्रेष्ठ चिकित्सा सुविधाओं वाले देशों में भी इस महामारी का व्यापक प्रभाव हुआ है।

कोविड महामारी की प्रारम्भिक अवस्था में, इस रोग से ग्रसित रोगी का RT-PCR परीक्षण (जोकि कोविड़

रोग के लिए उत्तरदायी विषाणु को पहचानने में कारगर प्रयोगशाला परीक्षण है) किया जाता था तथा परीक्षण का परिणाम धनात्मक (Positive) आने पर रोगी को रोग की तीव्रता के आधार पर चिकित्सकीय परामर्श के अधीन प्रेक्षण में तब तक रखा जाता था जब तक कि रोगी की रिपोर्ट ऋणात्मक ना आ जाए। किन्तु बदली हुई परिस्थितियों में अब एक स्वस्थ व्यक्ति का RT-PCR परीक्षण किए जाने पर भी परीक्षण धनात्मक परिणाम दे रहा है। इसका अर्थ यह है कि लगभग सम्पूर्ण जनसंख्या का इस महामारी से ग्रसित होना संदेहास्पद है।

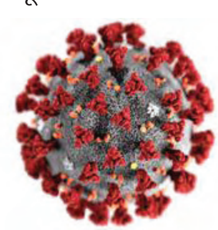
2. साहित्य सर्वेक्षण

कोविड –19 के कारगर ईलाज से संबंधित शोध अभी तक नहीं हो पाई है क्योंकि यह नवीनतम बीमारी है। बकेर (Bacaer) (1) ने वर्तमान कोरोना विषाणु जनित महामारी पर आधारित द्वि प्रावस्था एस ई आई आर (SEIR) गणितीय निदर्श का अध्ययन किया। कोचनकजीक एवं अन्य (Kochanczyk et al) (2) ने कोविड–19 के प्रसार से संबंधित एक संवेदनशील (Susceptible), प्रकट (Exposed), संक्रामक (Infectious) तथा रोगमुक्त (Removed) समूहों पर आधारित निदर्श की रचना की जिसमें निदर्श को केवल औसत ऊष्मायन अवधि (Incubation period) τ तथा दो दर प्राचलों (Rate Parameters): संपर्क दर (Contact Rate) β तथा अपवर्जन दर (Exclusion Rate) γ की सहायता से प्राचलीकृत किया। बनर्जी एवं अन्य (Banerjee et al) (3) ने द्वि चरण वृद्धि को समझने के लिए प्रतिरक्षा–महामारी विज्ञान (Immuno–epidemiological model) से संबंधित निदर्श को प्रस्तावित किया। कुचरस्की एवं अन्य (Kucharski et al) (4) ने कोविड –19 के संचरण (Transmission) की प्रारम्भिक गतिकी तथा नियंत्रण का गणितीय निदर्शन किया। कीयरोची (Ciarochi) (5) ने कोविड –19 एवं अन्य संक्रामक बीमारियों के फैलाव के बारे में प्रारम्भिक रूपरेखा प्रस्तुत की। जैन एवं अन्य (Jain et al) (6) ने समांतर रूप से कोविड–19 के लक्षण रखने वाले तथा बिना लक्षण वाले दोनों ही प्रकार के रोगियों के लिए नवीन निदर्श प्रस्तावित किया। इस अध्ययन में विश्व स्वास्थ्य संगठन, जेनेवा की कोविड–19 के स्थिति प्रतिवेदन (7) को भी सम्मिलित किया गया है। फिट्जपैट्रिक एवं अन्य (Fitzpatrick et al) (8) ने निदर्श के विकास, मान्यकरण (Validation) तथा व्याख्या (Interpretation) से उत्पन्न हुई कठिनाई को रेखांकित किया। इस शोध पत्र में लक्षणात्मक तथा अलक्षणात्मक दोनों ही प्रकार के रोगियों के निकाय में प्रवेश को समाहित करते हुए एक नया गणितीय निदर्श प्रस्तावित किया गया है। शोध पत्र का संगठन इस प्रकार है :–

खंड 3 में कोविड –19 से संबंधित सिद्धांत तथा इस रोग के लिए उत्तरदायी विषाणु से संबंधित सभी आवश्यक जानकारियों का समावेशन किया गया है। खंड 4 में पूर्व में अस्तित्व में आए हुए गणितीय निदर्शों का वर्णन किया गया है। खंड 5 में कोविड–19 के उपचार के लिए निर्णयन किए जाने के लिए एक निदर्श का विकास किया गया है। अंत में खंड 6 में निष्कर्ष समाहित है।

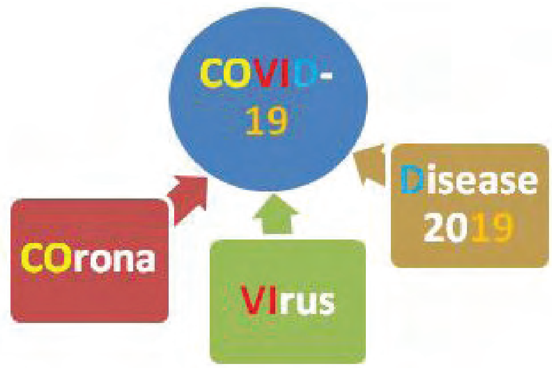
3. रोग से संबंधित प्रारम्भिक जानकारियाँ

वृहद पैमाने पर संक्रामक बीमारी जैसे कोविड–19 से लड़ने में गणितीय महामारी विज्ञान (Mathematical Epidemiology) का अति महत्वपूर्ण स्थान है। जनवरी 2020 में कोरोना विषाणु ने सर्वप्रथम चीन के वुहान से अपना तांडव शुरू किया। उसके बाद सम्पूर्ण चीन में मानवता पर आघात किया, साथ ही वैश्विक तौर पर इस विषाणु ने अपने पैर पसारना शुरू किया। हम इस विषाणु के फैलाव को गणितीय दृष्टि से समझने का प्रयास करते है।



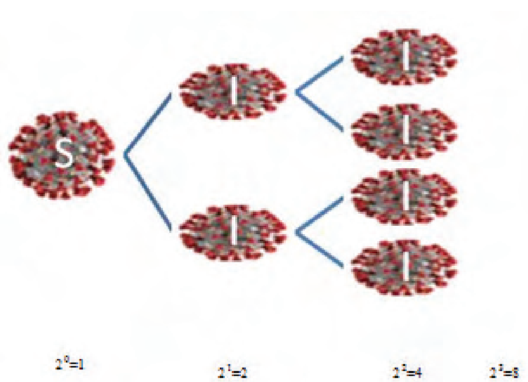
कोरोना विषाणु का व्यास 120–160 नैनोमीटर होता है। इसका बाहरी आवरण 20 नैनोमीटर लंबे

आकार का होता है जोकि मुकुट के आकार का कहा जा सकता है। इसे नग्न आँखों से नहीं देख सकते है। इसे केवल इलेक्ट्रान सूक्ष्मदर्शी (Electron Microscopy) द्वारा ही देखा जा सकता है।



कोविड–19 बीमारी एक विषाणु SARS-CoV–2 से जनित है। यह विषाणु कोरोना विषाणु कुल से संबंध रखता है जोकि सार्स (SARS) (Severe Acute Respiratory Syndrome) तथा मर्स (MERS) (Middle East Respiratory Syndrome) विषाणुओं के काफी करीब है। ये दोनों विषाणु पूर्व में बहुत तबाही मचा चुके है। सार्स, मर्स की तुलना में गरम वातावरण में भी जीवित रह सकता है। वर्तमान में, एक संक्रमित व्यक्ति अन्य को भी संक्रमित कर रहा है ; साथ ही असंक्रमित व्यक्ति भी संक्रमण का शिकार हो रहा है चाहे वह संक्रमित व्यक्ति के साथ प्रत्यक्ष संपर्क में नहीं आया हो।

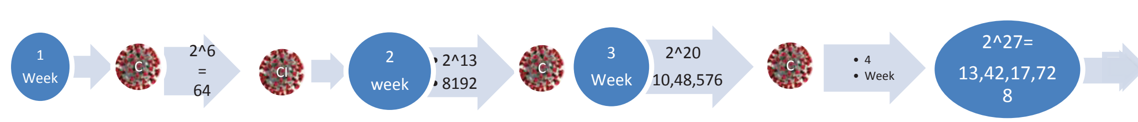
चरघातांकी वृद्धि



किसी महामारी के प्रारम्भिक चरण में, जब अधिकतम लोग संक्रमण के लिए संदिग्ध हो ; तब शाखन प्रक्रम से एक गणितज्ञ, व्यक्ति से व्यक्ति में संक्रमण के फैलाव को निदर्श के माध्यम से प्रस्तुत कर सकता है। यदि एक संक्रमित व्यक्ति औसत रूप से दो व्यक्तियों को संक्रमित करता है, तो प्रत्येक पीढ़ी में संक्रमितों की संख्या दुगुनी हो जाएगी। ऐसी वृद्धि चरघातांकी वृद्धि कहलाती है। निःसंदेह केवल एक संक्रमित व्यक्ति ही अन्यों को संक्रमित कर रहा हो, ऐसा नहीं है। संक्रमण की संभाविता को प्रभावित करने वाले और कई कारण भी है। किसी महामारी में, रोग की वृद्धि दर इस तथ्य पर निर्भर करती है कि एक संक्रमित व्यक्ति औसत रूप से कितने व्यक्तियों को तथा कितने समय में संक्रमित कर सकता है।

प्रत्येक संक्रमित व्यक्ति, व्यक्तियों की एक निश्चित संख्या को संक्रमित कर सकता है। कोरोना विषाणु पर प्राप्त आंकड़ों के अनुसार, एक व्यक्ति लगभग 2.5 व्यक्तियों को संक्रमित कर रहा है जो आगे फिर 2.5 व्यक्तियों को संक्रमित कर रहे है। गणितीय रूप से चरघातांकी वृद्धि को निम्न प्रकार दर्शाया गया है :–

साप्ताहिक चक्रविशलेषण



2^0=1 to 2^6 = 64 2^7 to 2^{13} = 8192 2^{14} to 2^{20} =10,48,576 2^{21} to 2^{27} =134,217,728

सैकड़ो में हजारों में दस लाख में दस करोड़ में इसी प्रकार

प्रारंभ में कोविड–19 का प्रसार बहुत धीमी गति से हुआ किन्तु बाद में अचानक वृद्धि हुई। ऊपर दर्शाये गए गणितीय चक्र विश्लेषण से स्पष्ट हुआ कि सामाजिक संपर्कों को कम कर तथा संक्रमित व्यक्ति को अन्यों के संपर्क से दूर रखकर इस वृद्धि पर विराम लगाया जा सकता है। सामाजिक दूरी के गणितीय अनुकार से संक्रमण वक्र का चपटा होना दृष्टिगत होता है। अधिकतम शोधकर्ताओं के अनुसार, कोविड–19 का प्रसार चरघातांकी नहीं है।

4. पूर्व में ज्ञात गणितीय निदर्श

गणित केवल बीमारी तथा संक्रमण के संदर्भ को समझने के लिए ही लाभदायक नहीं है, अपितु गणितीय निदर्श किसी देश के चिकित्सकर्मियों को उभरते हुए संक्रमणों को कम करने के उपायों के बारे में भी उपयोगी जानकारी उपलब्ध कराते है। इन निदर्शों के लक्ष्य में, ऐसी अनिवार्य समस्याएं जिनमें निदर्शन उपयोगी हो सकता है ; तथा इन समस्याओं को हल करने की दिशा में कारगर सहयोग किए जाने वाले तत्वों को पहचानना समाहित होता है। गणितीय निदर्शों की सहायता से हम बहुसंख्यक विकल्पों का अनुकार कर सकते है। इनकी सहायता से हम महामारी के बारे में पूर्वानुमान लगा सकते है।

गणितीय दृष्टि से, किसी रोग के निदर्शन में एक अति महत्वपूर्ण राशि R_0 होती है, जिसे आधारी जननात्मक (Basic Reproductive Number) संख्या भी कहते है। महामारी विशेषज्ञों के लिए कोविड–19 जैसे नए रोगों के अध्ययन के लिए R_0 का निर्धारण किया जाना मौलिक लक्ष्य होता है। R_0 अनिवार्य रूप से किसी रोग की संक्रामकता को मापने का पैमाना है। R_0, किसी संदिग्ध जनसंख्या में व्यक्तियों की वह औसत संख्या है जिससे यह दृष्टिगत होता है कि एक संक्रमित व्यक्ति किसी निश्चित समय में कितने व्यक्तियों को संक्रमित कर देगा।

R_0 के मानों की निम्न तीन अवस्थाएं होती है :–

(i) यदि $R_0<1$, तो एक संक्रमित व्यक्ति एक से कम व्यक्ति को संक्रमित करता है। रोग के फैलाव के नहीं होने का अनुमान कहा जा सकता है।

(ii) यदि $R_0=1$, तो एक संक्रमित व्यक्ति औसततः एक व्यक्ति को संक्रमित करता है। यह इंगित करता है कि रोग का फैलाव स्थायी है, तथा संक्रमितों की संख्या में वृद्धि अथवा कमी नहीं होना कहा जा सकता है।

(iii) यदि $R_0>1$, तो एक संक्रमित व्यक्ति औसत रूप से एक से अधिक व्यक्तियों को संक्रमित कर सकता है। इस अवस्था में रोग के फैलाव को रोकने में यदि हस्तक्षेप नहीं किया जाए तो रोग के फैलाव में बेतहाशा वृद्धि होती जाती है।

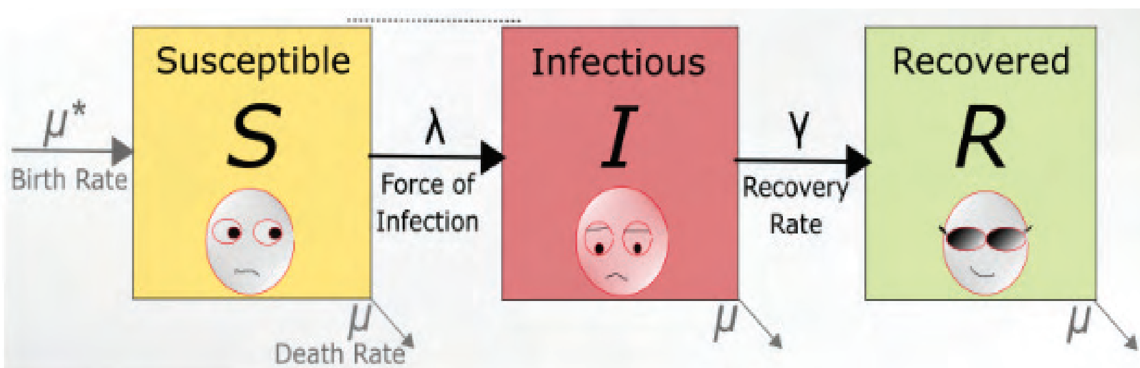
गणितीय दृष्टि से, चरघातांकी बंटन, मोंटे कार्लो अनुकार (यादृच्छिक चरों के हस्तक्षेप से विभिन्न परिणामों की प्रायिकताओं के बारे में पूर्वानुमान के लिए मोंटे कार्लो अनुकार (Monte Carlo Simulation) का प्रयोग किया जाता है। निदर्शों के पूर्वानुमान में जोखिम तथा अनिश्चितता के प्रभाव को समझाने के लिए भी मोंटे कार्लो अनुकार का उपयोग किया जाता है।), SIR निदर्श, SIS निदर्श, SEIR निदर्श, SEIRS निदर्शों का पूर्व में विभिन्न रोगों के निदर्शन में उपयोग किया गया है।

SIR निदर्श : किसी रोग के प्रभाव को कई स्तरों पर गणितीय निदर्शों के द्वारा अनुकारित किया जा सकता है, यथा रोग किस प्रकार एक रोगी की कोशिकाओं के मध्य परस्पर क्रिया पर प्रभाव परिलक्षित करता है, या भौगोलिक रूप से पृथक्कत जनसंख्या पर कैसा फैलाव होता है। किसी जनसंख्या में व जनसंख्या के मध्य रोग के फैलाव के निदर्श, जोकि कोविड–19 का पूर्वानुमान करने में प्रयुक्त होते है, संवेदनशील – संक्रमित – रोग–निवृत (Susceptible–Infectious–Recovered) (SIR) ढांचे पर आधारित होते है।

SIR निदर्श एक मौलिक गणितीय निदर्श है, जोकि 1920 के दशक में विकसित हुआ था किन्तु

महामारी से संबंधित अध्ययन के लिए इसे आज भी प्रयुक्त किया जाता है। इस निदर्श में व्यक्तियों की संख्या N (जनसंख्या) (किसी शहर, देश, महाद्वीप अथवा विश्व की) को तीन वर्गों में विभाजित किया जाता है : वे जो अभी संक्रमित नहीं है, किन्तु जिनकी लक्षणों से रोग से संक्रमितता संदिग्ध है (वर्ग S), वे जो संक्रमित रोगी है (वर्ग I), तथा वे जो रोग से निवृत हो गया है (वर्ग R), क्योंकि या तो वे रोग से उबरकर स्वस्थ हो गए है तथा रोग प्रतिरोधी हो गए है, या वे मृत्यु को प्राप्त हो गए है। इस निदर्श में समीकरणों का समुच्चय भी निर्धारित है, जिससे यह ज्ञात होता है कि किसी समय काल में (एक दिन अथवा एक माह में), कितने व्यक्ति एक वर्ग से किसी दूसरे वर्ग में स्थानांतरित होते है।

किसी मानक SIR निदर्श को निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है :–



किसी संदिग्ध व्यक्ति के संक्रमित होने की दर को संक्रमण बल कहते है, जिसे λ से निरूपित करते है। व्यक्तियों के संक्रमण से स्वास्थ्य लाभप्राप्त करने की दर को स्वास्थ्य लाभ दर कहते है जिसे γ से निरूपित करते है। यहाँ λ एक अचर नहीं है, वरन संक्रामक विभाग के आकार का फलन है। संक्रमण बल λ, हस्तांतरण दर β के समानुपाती होता है, जहाँ λ तथा β में निम्न संबंध होता है :–

$\lambda(I) = \frac{\beta}{N}$ क्योंकि व्यक्ति विभिन्न विभागों के मध्य आवागमन कर सकता है, अतः प्रत्येक विभाग में व्यक्तियों की संख्या समय के साथ परिवर्तित होती है। अस्थाई रूप से प्राकृतिक जन्म–मृत्यु दरों को उपेक्षणीय करते हुए, SIR निदर्श को साधारण अवकल समीकरणों के निम्न निकाय से निरूपित किया जा सकता है :–

$\frac{dS}{dt} = -\lambda(I)S$,जब संवेदनशील व्यक्तियों तथा संक्रमितों पर विचार किया गया है।

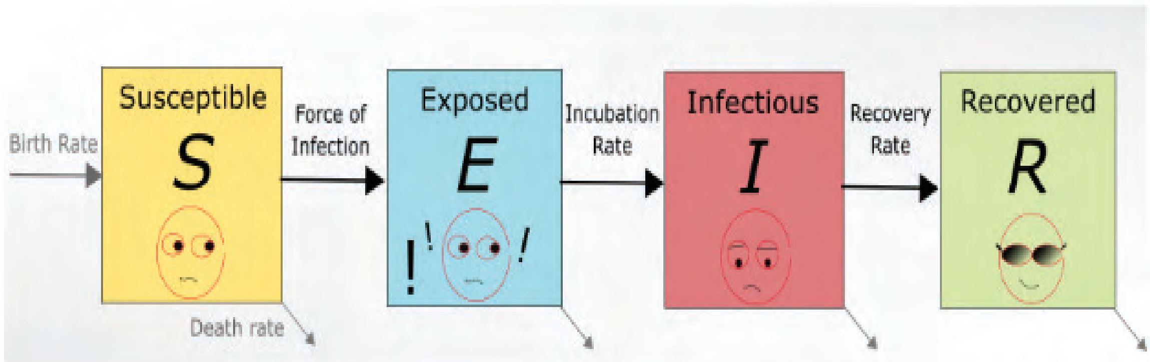
$\frac{dI}{dt} = \lambda(I)S - \gamma I$,जब संवेदनशील व्यक्तियों,संक्रमितों तथा रोग–निवृत्त तीनों वर्गों पर विचार किया गया है।

$\frac{dR}{dt} = \gamma I$, जब संक्रमितों तथा रोग–निवृत्त वाले दोनों वर्गों पर विचार किया गया है।

SEIR निदर्श : उपरोक्त SIR निदर्श को गणितीय निदर्शन के लिए लंबे समय से महामारी विश्लेषण के लिए प्रयुक्त किया जाता है किन्तु कोविड–19 जैसी बीमारी के लिए यह निदर्श अधिक उपयुक्त नहीं है। अधिकांश बीमारियों में एक ऊष्मायन अवधि होती है, जिसमें एक संक्रमित व्यक्ति किसी दूसरे व्यक्ति को संक्रमित नहीं कर सकता। इस अतिरिक्त विभाग – E (Exposed) (प्रकट) को SIR निदर्श में समाहित करने

पर यह SEIR निदर्श में समानीत हो जाता है। विश्व स्वास्थ्य संगठन ने वुहान में कोविड़–19 के प्रारम्भिक चरणों के पूर्वानुमान के लिए SEIR निदर्श का उपयोग किया था।

किसी मानक SEIR निदर्श को निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है:–



इस निदर्श में ऊष्मायन दर (वह दर जिससे प्रकट हुआ व्यक्ति संक्रमित हो जाता है) को सम्मिलित किया गया है।

प्रकट विभाग में वृद्धि के कारण, एक प्राचल में बढ़ोतरी हो गई है तथा S-E-I-R के विभिन्न संयोजन बन जाते है। इस अवस्था में विभिन्न निदर्शों की अवकल समीकरणें SIR निदर्श की तुलना में कठिन हो जाती है। ऐसी कठिन समीकरणें साधारण अवकल समीकरण के लिए बनाए गए सॉफ्टवेयर से हल की जा सकती है। इस निदर्श से संबंधित अवकल समीकरणें निम्न है :–

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\beta \mathrm{SI}}{N}$$

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\beta \mathrm{SI}}{N} - \sigma E$$

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = \sigma E - \gamma I$$

$$\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = \gamma I$$

5. प्रस्तावित गणितीय निदर्श का विकास

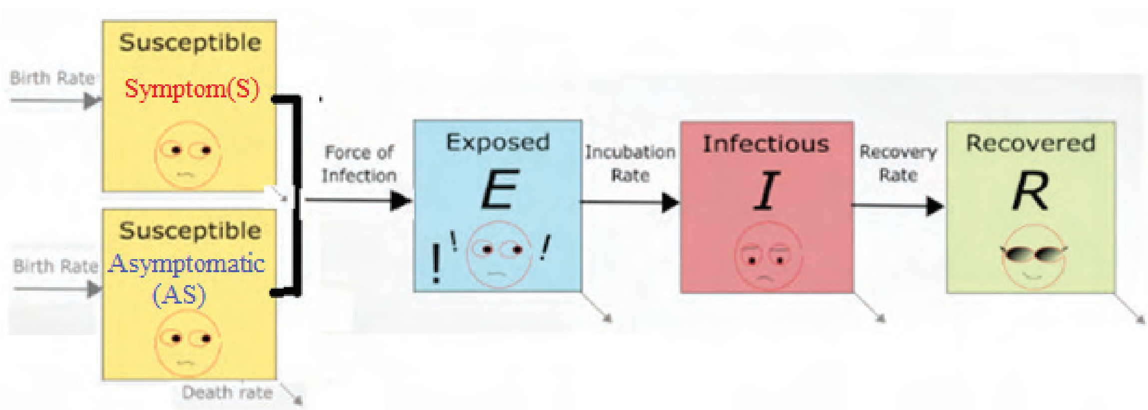
(S+AS) EIR निदर्श ((Symptomatic and Asymptomatic) Exposed Infected Recovered) Model

उपरोक्त SEIR निदर्श को वैश्विक महामारी कोविड–19 के गणितीय निदर्शन के लिए प्रयुक्त किया गया तथा अच्छे परिणाम प्राप्त हुए। SIR व SEIR निदर्शों में, संवेदनशील रोगियों की संख्या को निरूपित करता है; जिन्हें कोविड–19 की प्रारम्भिक अवस्था में चिकित्सा सुविधा की आवश्यकता थी तथा जिनमें रोग के लक्षण यथा बुखार,सूखी खांसी व सांस लेने में कठिनाई थी। अधिकांश अध्ययनों में यह पाया गया कि कोविड–19

के 80 प्रतिशत मामलों में सापेक्षिकतः कम लक्षण पाए गए थे जो बिना गंभीर बीमारी के ही ठीक हो गए अतः ऐसे मामले असूचित रह गए।

वर्तमान में यह देखा गया है कि काफी स्वस्थ लोग जिनमें कोविड–19 से संबंधित कोई लक्षण नहीं थे किन्तु उनका कोरोना परीक्षण धनात्मक प्राप्त हुआ, ऐसी स्थिति में पूर्व प्रचलित SIR व SEIR निदर्श असफल हो जाता है। लक्षण नहीं रखने वाले व्यक्तियों के अध्ययन के लिए ही (S+AS)EIR निदर्श का गणितीय विकास किया गया है। यहाँ लक्षणात्मक तथा अलक्षणात्मक दोनों ही प्रकार के व्यक्तियों के लिए (S+AS) EIR गणितीय निदर्श प्रस्तावित किया गया है।

मानक (S+AS)EIR निदर्श को निम्न प्रकार निरूपित किया जा सकता है :–



(S+AS)EIR निदर्श में दो प्रकार के संवेदनशील विभागों के कारण, एक संभावना में वृद्धि हो जाती है तथा S+AS-E-I.R में विभिन्न संयोजन बनते है। इस अवस्था में विभिन्न निदर्शों की अवकल समीकरणें SEIR निदर्श की तुलना में कठिन हो जाती है। ऐसी कठिन समीकरणें साधारण अवकल समीकरणों के लिए बनाए गए सॉफ्टवेयर से हल की जा सकती है। इस निदर्श से संबंधित अवकल समीकरणें निम्न है :–

$$\frac{\mathrm{dS}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\beta(S+\mathrm{AS})I}{N}$$

$$\frac{\mathrm{dAS}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\beta(S+\mathrm{AS})I}{N}$$

$$\frac{\mathrm{dE}}{\mathrm{dt}} = -\frac{\beta(S+\mathrm{AS})I}{N} - \sigma E$$

$$\frac{\mathrm{dI}}{\mathrm{dt}} = \sigma E - \gamma I$$

$$\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}} = \gamma I$$

यहाँ (S+AS)EIR निदर्श में हमने अवकल समीकरण विधि जोकि SIR व SEIR निदर्शों में प्रयुक्त की गई थी, के बजाय अलग उपगमन का उपयोग किया है। इस उपगमन में, दो प्रकार के रोगियों जिनमें कोविड –19 रोग के लक्षण पाए गए है अथवा लक्षण नहीं पाए गए है तथा दोनों ही प्रकार के रोगी समांतर रूप से चिकित्सा उपचार हेतु आते है ; पर विचार किया गया है। निःसंदेह वास्तविक जीवन की सभी समस्याओं में प्रत्येक स्थान पर अवकल समीकरण विधि या पंक्ति सिद्धांत अनिवार्य रूप से उपयुक्त परिणाम देता हो, यह आवश्यक नहीं है।

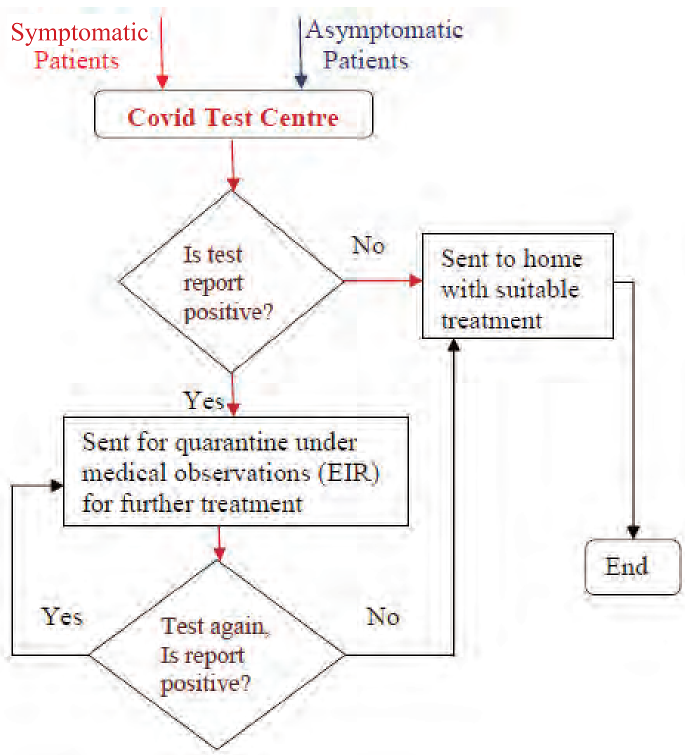
अभी हमें रोग के लक्षण रखने वाले तथा लक्षण नहीं रखने वाले रोगियों के आँकड़ें या उनके मध्य सहसंबंध उपलब्ध नहीं है। अतः हमें कुछ मान्यताओं की आवश्यकता होती है,जब रोगी कोविड–19 का परीक्षण करवाने हेतु परीक्षण केंद्र पर पहुंचते है।

मान्यताएं :

1. सर्वप्रथम रोग के लक्षण रखने वाले रोगियों तत्पश्चात लक्षण नहीं रखने वाले रोगियों का उपचार प्रारम्भ करते है.

2. दोनों ही प्रकार के वे रोगी जिनकी परीक्षण रिपोर्ट धनात्मक प्राप्त हुई है, उन्हें निर्विवाद रोगी माना जा सकता है तथा उन्हें आगे उपचार के लिए उजागर संवर्ग में भेज दिया जाता है.

3. रोगियों के आगमन तथा उनके उपचार (सेवा के शुरू होने) के मध्य कोई भी विलंब नहीं है.



हम रोगियों की स्थिति को निर्दिष्ट करते हुए किसी भी समय पर इस निदर्श का वर्णन कर सकते है। रोगी दोनों ही प्रकार का हो सकता है :– रोग के लक्षणों को रखने वाला (Symptomatic)(अवस्था S) अथवा,रोग के लक्षणों को नहीं रखने वाला (Asymptomatic)(अवस्था AS)

निदर्श का आगे विश्लेषण करने से पूर्व हमें कुछ और जानकारियाँ जैसे रोगी की रोग–निवृत्ति दर आदि की आवश्यकता होगी। अतः हम यह मानते है कि रोग–निवृत्त होने में लिया गया समय ऋणात्मक चरघातांकी बंटन रखता है जिसका माध्य $\frac{1}{\lambda}$ है।

यदि रोगी किसी समय t पर लक्षणयुक्त है, तब उसके किसी समय $t+\delta t$ पर लक्षणयुक्त रहने की प्रायिकता $1-\lambda\,\delta t + O(\delta t)$ तथा समय $t+\delta t$ पर लक्षणमुक्त हो जाने की प्रायिकता $\lambda\,\delta t + O(\delta t)$ होगी।

यदि दोनों ही प्रकार के रोगी किसी समय t पर उपचाराधीन है, तब किसी समय $t+\delta t$ तक उनका उपचार जारी रहने की प्रायिकता $1-\mu\,\delta t + O(\delta t)$ है। जबकि $t+\delta t$ समय पर उपचार के पूर्ण होने की प्रायिकता $\mu\,\delta t + O(\delta t)$ है।

(S+AS)EIR निदर्श का प्रसंभाव्य वर्णन करने हेतु हम यह मानते है कि,

$P_S(t)$ =किसी समय t पर किसी लक्षणात्मक रोगी के उपचाराधीन होने की प्रायिकता

$P_{AS}(t)$ =किसी समय t पर किसी अलक्षणात्मक रोगी के आने की प्रायिकता

तब $P_S(t+\delta t) = P_S(t)(1-\lambda\,\delta t + O(\delta t)) + P_{AS}(t)(\mu\,\delta t + O(\delta t))$ ... (1)

$P_{AS}(t+\delta t) = P_S(t)(\lambda\,\delta t + O(\delta t)) + P_{AS}(t)(1-\mu\,\delta t + O(\delta t))$ ... (2)

दोनों समीकरणों के संयोजन से

$$\frac{P_S(t+\delta t) - P_S(t)}{\delta t} = -\lambda P_S(t) + \mu P_{AS}(t) + \frac{O(\delta t)}{\delta t}$$

$$\frac{P_{AS}(t+\delta t) - P_{AS}(t)}{\delta t} = \lambda P_S(t) - \mu P_{AS}(t) + \frac{O(\delta t)}{\delta t}$$

जब $\delta t \rightarrow 0$

जब $\delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = -\lambda P_S(t) + \mu P_{AS}(t) \quad \ldots (3)$$

$$\frac{dP_{AS}(t)}{dt} = \lambda P_S(t) - \mu P_{AS}(t) \quad \ldots (4)$$

निःसंदेह $P_S(t) + P_{AS}(t) = 1$ ... (5)

समीकरणों (3) व (4) को जोड़ने पर,

$$\frac{d}{dt}\left(P_S(t) + P_{AS}(t)\right) = 0 \quad \ldots (6)$$

ताकि $P_S(t) + P_{AS}(t)$ एक अचर है तथा इसका मान 1 है।

इस प्रकार हम प्रायिकताओं $P_S(t)$ तथा $P_{AS}(t)$ के लिए अवकल समीकरणों को व्युतपित कर चुके है। यदि हम समीकरण (3) से $P_{AS}(t)$ का लोप करने के लिए समीकरण (5) का उपयोग करें, तो

$$\frac{dP_S(t)}{dt} = \mu - (\lambda + \mu)P_S(t) \quad \ldots (7)$$

जिसका व्यापक हल निम्न है

$$P_S(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ae^{-(\lambda+\mu)t} \quad \ldots (8)$$

अतः जब $t = 0$, $P_S(t) = P_S(0)$,तब

$$P_S(t) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}\left[1 - e^{-(\mu+\lambda)t}\right] + P_S(0)e^{-(\mu+\lambda)t}$$

इसी प्रकार,

$$P_{AS}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left[1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right] + P_{AS}(0)e^{-(\lambda+\mu)t}$$

अंतिम दो समीकरणें (S+AS) निकाय के लिए क्षणिक हल देती है तथा किसी समय t पर निकाय की दोनों अवस्थाओं का प्रसंभाव्य वर्णन करती है।

निष्कर्ष

वर्तमान में तांडव मचा रही कोविड–19 महामारी में प्रकट हो रहे अलक्षणात्मक रोगियों की संभावित रोगग्रस्तता की अवस्था को भी शोध पत्र में शामिल किया गया है। प्रस्तावित (S+AS)EIR निदर्श में लॉकडाउन की स्थितियों के चलते आँकड़ें उपलब्ध नहीं है। लक्षणयुक्त व लक्षणमुक्त वर्गों के आंकड़ों तथा इनके मध्य सहसंबंध की अनुपलब्धता के चलते निदर्श का संख्यात्मक विकास लगभग असंभव है। अतः इस संवर्ग के अंतर्गत निदर्श का संरूपण तथा भविष्य का अनुसंधान आंकड़ों की उपलब्धता के अधीन प्रक्रियाधीन है। हमारा प्रस्तावित (S+AS)EIR निदर्श व्यापक निदर्श है क्योंकि AS के विशेष मानों के लिए यह SEIR निदर्श में समानीत होता है तथा पुनः E (प्रकट) के विशेष मानों के लिए यह निदर्श SIR निदर्श में समानीत होता है।

शोध पत्र में प्रयुक्त अंग्रेजी शब्दों की समानार्थक हिन्दी शब्दावली

Alphabetically sorted terminology in English	वर्णमाला अनुक्रमित हिन्दी शब्दावली
Asymptomatic	लक्षणमुक्त
Branching process	शाखन प्रक्रम
Correlation	सहसंबंध
Epidemic	महामारी
Exclusion	अपवर्जन
Exposed	प्रकट
Immuno–epidemiological model	प्रतिरक्षा– महामारी विज्ञान निदर्श
Incubation	ऊष्मायन
Infected	संक्रमित
Modeling	निदर्शन
Recovered	रोग–निवृत
Reproductive number	जननात्मक संख्या
Sanitizer	प्रक्षालक
Simulation	अनुकार
Stochastic	प्रसंभाव्य
Suspected	संदिग्ध
Symptomatic	लक्षणात्मक
Transient Solution	क्षणिक हल
Validation	मान्यकरण

संदर्भ

1. Nicolas Bacaer, (2020): Un modèle mathématique des débuts de l'épidémie de coronavirus en France. Math. Model. Nat. Phenom., DOI: https://doi.org/10.1051/mmnp/2020015.
2. Marek Kochanczyk, Frederic Grabowski and Tomasz Lipniacki, (2020): Dynamics of COVID19 pandemic at constant and time dependent contact rates. Math. Model. Nat. Phenom. 15 (2020) 28.
3. Malay Banerjee, Alexey Tokarev and Vitaly Volpert (2020): Immuno-epidemiological model of two-stage epidemic growth. Math. Model. Nat. Phenom. 15 (2020) 27.
4. A J Kucharski, T W Russell, C Diamond, Y Liu, J Edmunds, S Funk (2020): Early dynamics of transmission and control of COVID-19: A mathematical modeling study DOI:https://doi.org/10.1016/S1473-3099(2020)30144-4
5. Jennifer Ciarochi (2020) : How COVID-19 and Other Infectious Diseases Spread. Mathematical Modeling, triplebyte.com › blog › modeling-infectious-diseases.
6. Jain S, Jain S (2020): A new mathematical model for covid - 19. Accepted for publication in Communication in Mathematical Modeling and Applications.
7. WHO, Corona virus disease 2019 (COVID-19). Situation report 24. February 13, 2020.World Health Organization, Geneva 2020.
8. Fitzpatrick, Meagan C., Chris T. Bauch, Jeffrey P. Townsend, and Alison P. Galvani. 2019. "Modelling Microbial Infection to Address Global Health Challenges." Nature Microbiology 4 (10): 1612–19. https://doi.org/10.1038/s41564-019-0565-8.
9. Kapur, J.N., (1998): Mathematical Modelling, New age International Publishers.
10. Brian, A., (2010): Mathematical Modeling with Excel, John & Bartlett Learning.